Алгебра

ЗАКОНЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

$$a+b=b+a$$

$$ab=ba$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

$$(ab)c=a(bc)$$

$$a(b+c)=ab+ac$$

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

ПРАВИЛА РАСКРЫТИЯ СКОБОК

$$a+(b+c)=a+b+c$$

$$a+(b-c)=a+b-c$$

$$a-(b+c)=a-b-c$$

$$a-(b-c)=a-b+c$$

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

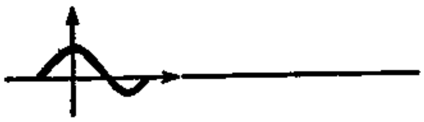
$$a^m a^n=a^{m+n} \qquad (ab)^m=a^m b^m$$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$$

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

Алгебра

УЧЕБНИК ДЛЯ 7 КЛАССА СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ



Утверждено Государственным комитетом СССР по народному образованию

МОСКВА „ПРОСВЕЩЕНИЕ" 1995

ББК 22.14я72
А45

Авторы:

Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров,
Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин

Издание подготовлено под научным руководством академика А. Н. Тихонова

Учебник занял второе место на Всесоюзном конкурсе учебников для средней общеобразовательной школы

Условные обозначения в учебнике

△ — начало решения задачи

▲ — окончание решения задачи

○ — начало обоснования математического утверждения или вывода формулы

● — окончание обоснования или вывода

═══ — знак, отделяющий обязательные задачи от дополнительных

* — дополнительные более сложные задачи

** — трудные задачи

| — выделение основного материала

— занимательные задачи

(!) — текст, который важно знать и полезно помнить (необязательно наизусть)

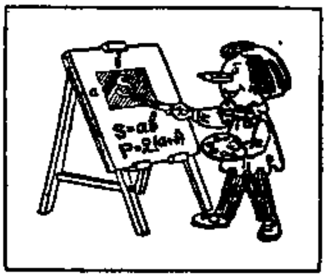
ПРОВЕРЬ СЕБЯ! — самостоятельная работа для проверки знаний по основному материалу

Алгебра: Учеб. для 7 кл. сред. шк./ Ш. А. Алимов,
А45 Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.— М.: Просвещение, 1991.— 191 с.: ил.— ISBN 5-09-003379-X.

А $\frac{4306020000-245}{103(03)-91}$ инф. письмо — 91, №67а   ББК 22.14я72

ISBN 5-09-003379-X

Глава I
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ



§ 1. ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Задача 1. Из коробки, содержащей 100 карандашей, отложили 32 карандаша, а остальные поделили поровну между семнадцатью учениками. Сколько карандашей получил каждый ученик?

△ После того как из коробки взяли 32 карандаша, в ней осталось (100—32) карандашей. Чтобы узнать, сколько карандашей получил каждый ученик, нужно найти значение выражения $\frac{100-32}{17}$. В результате получим 4. Итак, каждый ученик получил 4 карандаша. ▲

При решении задачи использовалась запись

$$\frac{100-32}{17},$$

состоящая из чисел, соединенных знаками арифметических действий. Напомним, что такие записи называют *числовыми выражениями*. Приведем еще примеры числовых выражений:

$$2\cdot3+7;\ 10:2-3;\ \frac{4\cdot0{,}5+3}{5};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}.$$

Если в числовом выражении выполнить указанные действия, то получится число, которое называют *значением* этого *числового выражения*, или, короче, значением выражения.

Например, значением выражения $\frac{100-32}{17}$ является число 4; значением выражения $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ является число $\frac{1}{6}$.

Числовое выражение может состоять из одного числа.

Иногда в числовом выражении, кроме чисел и знаков действий, используются скобки. Например, в выражении $(2{,}5+3{,}5)\cdot2{,}1$ содержатся скобки.

Вычислив значение этого выражения, получим число 12,6. Поэтому можно записать:

$$(2,5+3,5)\cdot 2,1=12,6.$$

Слева и справа от знака «=» стоят числовые выражения.

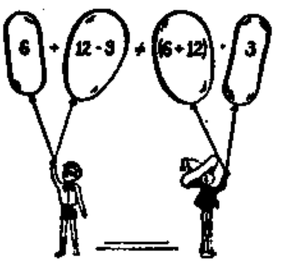
Два числовых выражения, соединенные знаком «=», образуют *числовое равенство*.

Если значения левой и правой частей числового равенства совпадают, то равенство называют *верным*.

Например, $\frac{15+1}{2}=7+1$ — верное равенство, так как значения его левой части и правой части совпадают и равны 8.

Задача 2. Найти значения выражений

$$6+12\cdot 3 \text{ и } (6+12)\cdot 3.$$



△ Используя известный порядок действий, получаем:

$$6+12\cdot 3=6+36=42,$$
$$(6+12)\cdot 3=18\cdot 3=54. \blacktriangle$$

Этот пример напоминает, что скобки влияют на результат выполнения действий.

Напомним, что сложение и вычитание называют *действиями первой ступени*; умножение и деление — *действиями второй ступени*; возведение в квадрат и куб — *действиями третьей ступени*.

При нахождении значения числового выражения принят следующий *порядок выполнения действий:*

1) Если выражение не содержит скобок, то сначала выполняют действия третьей ступени, затем действия второй ступени и, наконец, действия первой ступени; действия одной и той же ступени выполняют в том порядке, в котором они записаны.

Например:

$$3\cdot 5^2\cdot 4-5\cdot 4+7=3\cdot 25\cdot 4-5\cdot 4+7=300-20+7=280+7=287.$$

2) Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия над числами, заключенными в скобках, а затем все остальные действия; выполнение действий над числами в скобках и вне их производится в порядке, указанном в п. 1.

Например:

$$(2^3\cdot 4-7)\cdot 6-(3+2\cdot 4)=(8\cdot 4-7)\cdot 6-(3+2\cdot 4)=$$
$$=(32-7)\cdot 6-(3+8)=25\cdot 6-11=150-11=139.$$

3) Если вычисляется значение дроби, то сначала выполняются действия в числителе дроби и в знаменателе, а затем первый результат делится на второй.

Например:

$$\frac{2\cdot 3^3+6\cdot 5}{3+5^2}=\frac{2\cdot 27+6\cdot 5}{3+25}=\frac{54+30}{3+25}=\frac{84}{28}=3.$$

4) Если выражение содержит скобки, заключенные внутри других скобок, то сначала выполняют действия во внутренних скобках.

Например:

$$2\cdot(8-(5^2-4))=2\cdot(8-(25-4))=2\cdot(8-21)=2\cdot(-13)=-26.$$

Задача 3. Вычислить:

$$\frac{5,2+3,9\cdot 2-(14.7+5,3):4}{3,5-1,5\cdot 5}.$$

△ Выполним вычисления, используя правила о порядке действий:

1) $14,7+5,3=20$; 2) $3,9\cdot 2=7,8$; 3) $20:4=5$;

4) $5,2+7,8-5=8$; 5) $1,5\cdot 5=7,5$; 6) $3,5-7,5=-4$;

7) $8:(-4)=-2$. ▲

Упражнения

1. Вычислить:

   1) $75-3,75$; 2) $0,48\cdot 25$; 3) $\frac{2}{3}-2$; 4) $\frac{4}{7}:8$;

   5) $5\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{11}$; 6) $1\frac{1}{7}:\frac{1}{14}$; 7) $-18:(-4,5)$; 8) $(-10,5)\cdot 0,4$.

2. Записать в виде числового выражения:

   1) произведение суммы и разности чисел 13 и 17;

   2) удвоенное произведение чисел $\frac{1}{3}$ и 2,7.

3. Записать в виде числового равенства и проверить, верно ли оно:

   1) сумма чисел $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$ равна разности чисел $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{15}$;

   2) произведение чисел 40 и 0,03 равно частному от деления числа 6 на число 5;

3) удвоенная разность чисел 10 и -2 в три раза больше суммы этих же чисел;

4) утроенная сумма чисел 2 и 6 в два раза больше произведения этих же чисел.

4. В кассе кинотеатра продано 154 билета по 25 к. и 76 билетов по 30 к. Сколько денег получено за все билеты?

5. Указать порядок выполнения действий и вычислить:

1) $1{,}7\cdot 3^2+\frac{2}{3}\cdot 12-15$;

2) $27{,}7-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 100+6{,}4:0{,}8$;

3) $48\cdot 0{,}05-\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 54+1{,}7$;

4) $(2{,}5)^2+15\cdot\frac{3}{5}-0{,}24:0{,}6$.

6. Найти значение числового выражения:

1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{13}-\frac{1}{2}\right)$;

3) $4\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\left(1\frac{7}{9}-\frac{4}{9}\right)$; 4) $5\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\cdot\left(1\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)$;

5) $\left(3\frac{1}{3}\cdot 3^2-17\right):13-0{,}07$; 6) $1-\left(75\cdot\frac{1}{3}-2{,}67\cdot 3^2\right)$.

7. Выполнить действия:

1) $\frac{0{,}3\cdot 5^2-15}{3{,}5+2^2}$; 2) $\frac{4{,}2:6-3\frac{1}{3}\cdot 0{,}3}{7{,}5:0{,}5}$;

3) $13\frac{1}{3}\cdot(18{,}1-(3^2+6{,}1))$; 4) $((7{,}8:0{,}3-3^3)+3{,}1):0{,}7$.

---

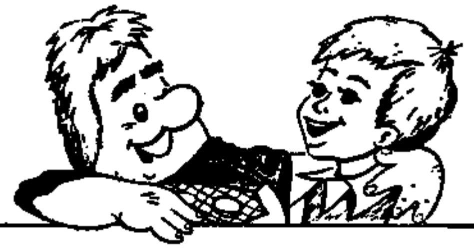
8. Записать в виде равенства и проверить, верно ли оно:

1) 20% от числа 240 равны 62;

2) число 18 составляет 3% от числа 600;

3) произведение чисел $15\frac{2}{5}$ и 5 составляет 11% от числа 700;

4) четвертая часть числа 18 равна 5% от числа 90.



№ 1

ЗАПИСАТЬ ВЫРАЖЕНИЕ, ЗНАЧЕНИЕ КОТОРОГО РАВНО 100, С ПОМОЩЬЮ ТОЛЬКО ЧЕТЫРЕХ ЦИФР 9 И ЗНАКОВ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ.

9. Не выполняя действий, с помощью прикидки показать, что равенство является неверным:

1) $18{,}07-23{,}2\cdot 5=78{,}93$; 2) $0{,}48\cdot 17=81{,}6$;

3) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}=1\frac{1}{21}$; 4) $\frac{3}{7}\cdot(-0{,}49)=2{,}1$.

10*. Чтобы успеть к отходу поезда, группа туристов должна пройти 22 км до станции за 6,5 ч. Туристы решили двигаться в следующем режиме: первые $5\frac{1}{4}$ ч идти со скоростью 4 км/ч, делая через каждые 1,5 ч пятнадцатиминутный привал, затем снизить скорость до 3 км/ч. Успеют ли они прибыть на станцию до отхода поезда?

§ 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Задача 1. Задумайте какое-нибудь число, умножьте его на 3, к полученному результату прибавьте 6, найденную сумму разделите на 3 и вычтите задуманное число. Какое число получилось?

△ Пусть задумано число 8. Выполним все действия в том порядке, как это указано в условии:

1) $8 \cdot 3 = 24$; 2) $24 + 6 = 30$; 3) $30 : 3 = 10$; 4) $10 - 8 = 2$. Получилось число 2.

Это решение можно записать в виде числового выражения $(8 \cdot 3 + 6) : 3 - 8$, значение которого равно 2.

Если бы было задумано число 5, то получилось бы числовое выражение $(5 \cdot 3 + 6) : 3 - 5$, значение которого также равно 2.

Возникает догадка о том, что, какое бы число мы ни задумали, в результате получится число 2. Проверим это. Обозначим задуманное число буквой a и запишем действия в том порядке, как указано в условии:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a.$$

Используя известные свойства арифметических действий, упростим это выражение: $(a \cdot 3 + 6) : 3 - a = a + 2 - a = 2$. ▲

При решении задачи было получено выражение

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a,$$

которое состоит из буквы a, обозначающей любое число, чисел 3 и 5, знаков действий и скобок. Это пример *алгебраического выражения*. Приведем еще примеры алгебраических выражений:

$$2 \cdot (m + n), \quad 3 \cdot a + 2 \cdot a \cdot b - 7, \quad (a + b) \cdot (a - b), \quad \frac{x + y}{a}.$$

Для сокращения записи знак умножения (точка) часто опускается. Например, вместо $2 \cdot a + 3 \cdot (x - y) \cdot (x + y)$ пишут

$$2a + 3(x - y)(x + y).$$

Если вместо букв, входящих в алгебраическое выражение, подставить некоторые числа и выполнить действия, то полученное в результате число называют *значением алгебраического выражения*.

Например, значение алгебраического выражения $3a + 2b - 7$ при $a = 2$, $b = 3$ равно 5, так как

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 7 = 5;$$

значение этого же алгебраического выражения при $a = 1$, $b = 0$ равно -4, так как $3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 7 = -4$.

Значение алгебраического выражения

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$$

равно 2 при любом значения a.

Задача 2. Найти значение алгебраического выражения

$$\frac{(3a + 7)b}{a - b} \text{ при } a = 10, \ b = 5.$$

$$\triangle \ \frac{(3 \cdot 10 + 7) \cdot 5}{10 - 5} = \frac{37 \cdot 5}{5} = 37. \ ▲$$

Упражнения

11. Записать:
   1) удвоенную сумму чисел 5 и m;
   2) половину разности чисел c и d;
   3) сумму числа 12 и произведения чисел a и b;
   4) частное от деления суммы чисел n и m на число 17.

12. Найти значение алгебраического выражения:
   1) $3a - 2b$ при $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$; $a = 0{,}01$, $b = \frac{1}{4}$;
   2) $2a + 3b$ при $a = 3$, $b = -2$; $a = -1{,}4$, $b = -3{,}1$;
   3) $0{,}25a - 4c^2$ при $a = 4$, $c = 3$; $a = 0{,}1$; $c = \frac{1}{2}$;
   4) $2a^2 - \frac{1}{3}b$ при $a = 2$, $b = 9$; $a = \frac{1}{4}$, $b = 2{,}4$.

13. Сколько минут: 1) в 7 ч 30 с; 2) в m часах; 3) в p секундах; 4) в m часах, l минутах и p секундах?

14. Найти значение выражения:

1) $\frac{5(bc+m)}{2q+4\frac{1}{4}}$ при $b=\frac{2}{3}$, $c=6$, $q=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{5}$;

2) $\frac{3(x-y)}{2p+q}-1$ при $x=8{,}31$, $y=2{,}29$, $p=2{,}01$, $q=2$.

15. Записать:

1) 66% от суммы чисел a и 4,02;

2) 33% от частного чисел x и 0,27.

16. Найти значение алгебраического выражения:

1) $\frac{\frac{1}{2}a+0{,}4:b-4{,}4}{3{,}5a-4b+8{,}2}$ при $a=1$, $b=2$; $a=0$, $b=1$;

2) $\frac{ab+\frac{1}{4}(a+b)}{6a-b+3}$ при $a=1$, $b=-1$; $a=-2$, $b=1$.

17. Может ли при каком-либо значении a равняться нулю алгебраическое выражение:

1) $a+999\,999$; 2) $\frac{3}{a-5}$; 3) $\frac{a-1}{47+a}$; 4) a^2+1?

18*. Число содержит 4 сотни, b десятков и c единиц. При каких значениях b и c данное число кратно тридцати?

§ 3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РАВЕНСТВА. ФОРМУЛЫ

При решении многих практических задач часто для обозначения чисел используются буквы.

Например, если a и b — длины сторон прямоугольника, то ab — его площадь, $2(a+b)$ — его периметр. Буквами a и b обозначены положительные числа — длины сторон прямоугольника, измеренные одной и той же единицей длины (например, в сантиметрах).

Обозначим площадь прямоугольника буквой S, а периметр буквой P, тогда получим формулы

$$S=ab, \quad P=2(a+b).$$

Если длины сторон измерены в сантиметрах, то S — число квадратных сантиметров, а P — число сантиметров.

Буквами обозначают также неизвестные числа в уравнениях. Например, в уравнении

$$x+12{,}3=95{,}1$$

неизвестное число обозначено буквой x, а в уравнении $2y+3=7$ буквой y.

С помощью букв удобно также записывать законы и свойства арифметических действий. Например:

$$a-(b+c)=(a-b)-c=a-b-c, \tag{1}$$

$$(a+b):c=a:c+b:c. \tag{2}$$

В алгебре одна и та же буква может принимать различные числовые значения. Так, в равенстве (1) a, b, c — любые числа; в равенстве (2) a и b — любые числа, а c может обозначать любое число, кроме нуля.

С помощью букв можно записать *формулы четного и нечетного натуральных чисел.*

Если a — четное число, то это число делится на 2 и его можно записать так:

$$\boxed{a=2n}, \tag{3}$$

где n — натуральное число.

Если b — нечетное число, то при делении его на 2 остаток равен 1 и поэтому число b можно записать так:

$$\boxed{b=2n+1}, \tag{4}$$

где n — натуральное число или нуль.

Иногда формулу нечетного числа записывают так:

$$b=2k-1,$$

где k — натуральное число.

Использование букв позволяет записать ход решения многих задач одного и того же типа. Приведем примеры.

З а д а ч а 1. Садовый участок в совхозе имел форму прямоугольника, длина которого равна a километрам, ширина — b километрам. После осушения болота площадь участка увеличилась на 0,88 км². Какой стала площадь садового участка? Провести вычисления для: 1) $a=2{,}2$ и $b=0{,}8$; 2) $a=1{,}4$ и $b=4{,}3$.

△ До осушения болота площадь сада была равна ab км², после осушения она стала равна $(ab+0{,}88)$ км².

1) При $a=2{,}2$ и $b=0{,}8$ получаем $2{,}2\cdot0{,}8+0{,}88=2{,}64$.

2) При $a=1{,}4$ и $b=4{,}3$ получаем $1{,}4\cdot4{,}3+0{,}88=5{,}9$. ▲

З а д а ч а 2. Турист вышел из поселка и направился в город. Пройдя 6 км, он сел в автобус и за t часов доехал до города.

1) Найти расстояние s (в км) между поселком и городом, если автобус двигался со скоростью v (в км/ч).

2) Из полученной формулы выразить t через s и v.

△ 1) За t часов турист проехал на автобусе vt километров. Поэтому расстояние между поселком и городом выражается формулой $s=6+vt$.

2) Из формулы $s=6+vt$ находим $vt=s-6$. Так как $v \neq 0$, то $t=\frac{s-6}{v}$. ▲

Условимся в дальнейшем при делении на алгебраическое выражение считать, что его значение не равно нулю, так как деление на нуль невозможно.

Упражнения

19. Куплено 6 папок по x копеек и 3 пачки бумаги по y копеек. Написать формулу стоимости p всей покупки.
20. В магазин привезли 15 ящиков слив, по a килограммов в каждом, и 20 ящиков яблок, по b килограммов в каждом. Написать формулу массы m товара, который привезли в магазин.
21. На машину погрузили a мешков пшеницы, по l килограммов в каждом, и c мешков овса, по n килограммов в каждом. Написать формулу массы m зерна, которую погрузили на машину.

Известный французский математик XVI в. Франсуа Виет (1540—1603) считается основоположником введения в алгебру буквенной символики.

22. В кинотеатре m рядов, по n мест в каждом, и еще k откидных мест. Сколько всего мест в кинотеатре? Составить формулу решения задачи и провести вычисления при $m=30$, $n=25$, $k=60$.
23. Сколько времени проводит ученик в школе в тот день, когда у него a уроков, b перемен по 15 мин и c перемен по 10 мин? Составить формулу решения этой задачи.
24. Указать, какие числовые значения могут принимать буквы a и b в алгебраических выражениях:

1) $\frac{a-b}{2}$; 2) $\frac{a-2}{b}$; 3) $\frac{b}{a-2}$; 4) $\frac{2}{a-b}$

25. Верно ли утверждение:

1) сумма двух любых нечетных чисел делится на 2;
2) сумма двух любых четных чисел делится на 4?

26. Группа геологов, продвигаясь по своему маршруту, ехала верхом на лошадях 3 ч 10 мин со скоростью c километров в час, затем плыла на плоту 1 ч 40 мин по реке, скорость течения которой a километров в час, и, наконец, шла пешком 2 ч 30 мин со скоростью b километров в час. Написать формулу пути, который преодолели геологи, обозначив длину маршрута (в км) буквой s. Вычислить длину маршрута, если $a=3,3$ км/ч, $b=5,7$ км/ч, $c=10,5$ км/ч.
27. Автобус проходит путь s километров за t часов. С какой скоростью должен ехать автомобиль, чтобы тот же путь пройти на 1 ч быстрее автобуса?

28. Верно ли утверждение:

1) произведение двух любых четных чисел делится на 4;
2) одно из двух последовательных четных чисел делится на 4?

29. 1) Из формулы $C=2\pi R$ выразить R через C и π.

2) Из формулы $V=\frac{m}{\rho}$ выразить:

а) ρ через m и V;
б) m через V и ρ.

3) Из формулы $s=vt+l$ выразить:

а) l через s, v и t;
б) v через s, t и l;
в) t через s, v и l.

30. Три пионерских отряда сажали деревья. Первый отряд посадил a деревьев, второй 80% того, что посадил первый, а третий — на 5 деревьев больше второго. Сколько деревьев посадили три отряда?

31*. Первые 7 км турист прошел за $1\frac{3}{4}$ ч, затем сделал привал на 15 мин, после чего прошел оставшиеся 10,5 км за 3 ч. Какой путь прошел турист от первоначального пункта за a часов, где $2<a<5$?

§ 4. СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

Для того чтобы успешно изучать алгебру, нужно хорошо знать свойства арифметических действий. Напомним, что арифметическими действиями называют действия сложения, вычитания, умножения и деления. Словесные формулировки свойств действий над числами будем коротко записывать в виде формул. Основные свойства действий обычно называют законами. Используя законы действий, можно обосновать и другие свойства действий.

1. Сложение и умножение.

Напомним законы сложения и умножения.

1. *Переместительный:*

$$\boxed{a+b=b+a, \quad ab=ba}.$$

2. *Сочетательный:*

$$\boxed{(a+b)+c=a+(b+c), \quad (ab)c=a(bc)}.$$

3. *Распределительный:*

$$\boxed{a(b+c)=ab+ac}.$$

В этих равенствах a, b, c — любые числа. Например,

$$1{,}2+3{,}5=3{,}5+1{,}2; \quad \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{3}{4};$$

$$(-8)\cdot(125+7)=(-8)\cdot 125+(-8)\cdot 7.$$

С помощью законов сложения и умножения можно получить другие свойства этих действий. Например:

$$a+b+c+d=a+(b+c+d),$$
$$(abc)d=(ab)(cd),$$
$$(a+b+c)d=ad+bd+cd.$$

Задача 1. Вычислить:

$$75+37+25+13.$$

△ Вычисления можно провести, следуя указанному порядку действий: сложить 75 и 37, к результату прибавить 25 и к последнему результату прибавить 13. Однако вычисления можно упростить, если воспользоваться свойствами сложения:

$$75+37+25+13=(75+25)+(37+13)=100+50=150. \ ▲$$

Этот пример показывает, что с помощью свойств действий можно проводить вычисления наиболее простым (рациональным) способом. Свойства действий применяются также для выполнения преобразований алгебраических выражений с целью их упрощения.

Задача 2. Упростить выражение

$$3(2a+4b)+5(7a+b).$$

△ $3(2a+4b)+5(7a+b)=3\cdot 2a+3\cdot 4b+5\cdot 7a+5\cdot b=$
$=6a+12b+35a+5b=(6a+35a)+(12b+5b)=$
$=(6+35)a+(12+5)b=41a+17b.$ ▲

В ходе решения этой задачи получилось выражение

$$6a+12b+35a+5b.$$

В этом выражении слагаемые $6a$ и $35a$ подобны, так как они отличаются друг от друга только коэффициентами. Слагаемые $12b$ и $5b$ также подобны. Поэтому и можно было записать вместо выражения $6a+12b+35a+5b$ выражение $41a+17b$, т. е. привести подобные слагаемые.

Записи преобразований можно делать краткими, выполняя промежуточные вычисления устно. Например:

$$6(3x+4)+2(x+1)=18x+24+2x+2=20x+26.$$

2. Вычитание.

Задача 3. На пути из Москвы в Ленинград расположен город Тверь. Расстояние между Москвой и Ленинградом равно 650 км, а между Москвой и Тверью — 167 км. Найти расстояние между Тверью и Ленинградом.

△ Пусть расстояние между Тверью и Ленинградом x километров. Тогда

$$167+x=650, \text{ откуда } x=650-167=483.$$

Ответ. 483 км. ▲

Из равенства

$$167+x=650$$

число x находится с помощью действия вычитания, которое называют обратным к действию сложения.

Вычитание можно заменить сложением с противоположным числом:

$$a-b=a+(-b).$$

Поэтому свойства вычитания можно обосновать свойствами сложения. Например:

$251+(49-13)=251+49-13=287,$	$a+(b-c)=a+b-c,$
$123-(23+39)=123-23-39=61,$	$a-(b+c)=a-b-c,$
$123-(83-77)=123-83+77=117,$	$a-(b-c)=a-b+c.$

Задача 4. Найти значение выражения

$$4(3x-5y)+6(x-y)$$

при $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{13}$.

△ Сначала упростим данное выражение:

$$4(3x-5y)+6(x-y)=12x-20y+6x-6y=18x-26y.$$

При $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{13}$ получаем:

$$18\cdot\frac{1}{2}-26\cdot\frac{1}{13}=9-2=7. ▲$$

Таким образом, использование свойств действий позволяет предварительно упростить алгебраическое выражение, а затем вычислить его значение более рациональным способом.

3. Деление.

Задача 5. Площадь прямоугольника равна 380 см^2, одна из его сторон равна 95 см. Найти другую сторону прямоугольника.

△ Из формулы $S=ab$ находим $b=\frac{S}{a}$. Так как $S=380$, $a=95$, то

$$b=\frac{380}{95}=4.$$

Ответ. 4 см. ▲

Из равенства $ab=S$ число b находится с помощью действия деления, которое называют обратным к действию умножения.

Деление можно заменить умножением на число, обратное делителю:

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}.$$

Поэтому свойства деления можно вывести из свойств умножения.

Задача 6. Доказать равенство

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c},$$

где $c\neq 0$.

△ Заменяя деление умножением, получаем:

$$\frac{a+b}{c}=(a+b)\cdot\frac{1}{c}.$$

Применяя распределительный закон, находим:

$$(a+b)\cdot\frac{1}{c}=a\cdot\frac{1}{c}+b\cdot\frac{1}{c}.$$

Заменяя умножение делением, получаем:

$$a\cdot\frac{1}{c}+b\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}. ▲$$

Упражнения

32. Найти значение числового выражения, используя законы и свойства арифметических действий:

1) $29\cdot0{,}45+0{,}45\cdot11$; 2) $(51{,}8+44{,}3+48{,}2-24{,}3)\cdot\frac{1}{3}$;

3) $4{,}07-5{,}49+8{,}93-1{,}51$;

4) $-11{,}401-23{,}17+4{,}401-10{,}83$.

33. Привести подобные слагаемые:

1) $4a+2b+a-b$; 2) $x-2y-3x+5y$;

3) $0{,}1c-0{,}3+d-c-2{,}1d$; 4) $8{,}7-2m+n-\frac{1}{3}m+\frac{2}{3}n$.

34. Привести подобные слагаемые:

1) $2{,}3a-0{,}7a+3{,}6a-1$;
2) $0{,}48b+3+0{,}52b-3{,}7b$;
3) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}a-\frac{5}{6}a+2$;
4) $\frac{5}{6}y-\frac{1}{3}b-\frac{1}{6}y+\frac{2}{3}b-3$;
5) $2{,}1m+n-3{,}2m+2n+1{,}1m-n$;
6) $5{,}7p-2{,}7q+0{,}3p+0{,}8q+1{,}9q-p$.

35. Упростить выражение:

1) $3(2x+1)+5(1+3x)$; 2) $4(2+x)-3(1+x)$;
3) $10(n+m)-4(2m+7n)$; 4) $11(5c+d)+3(d+c)$.

36. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $5(3x-7)+2(1-x)$ при $x=\frac{1}{26}$;
2) $7(10-x)+3(2x-1)$ при $x=-0{,}048$;
3) $\frac{1}{3}(6x-3)+\frac{2}{5}(5x-15)$ при $x=3{,}01$;
4) $0{,}01(2{,}2x-0{,}1)+0{,}1(x-100)$ при $x=-10$.

37. Используя свойства арифметических действий, вычислить:

1) $\frac{1}{7}(0{,}14+2{,}1-3{,}5)$; 2) $\frac{1}{12}(4{,}8-0{,}24-1{,}2)$;

3) $\left(18\frac{6}{7}+21\frac{3}{4}\right):3$; 4) $\left(15\frac{5}{7}+20\frac{15}{16}\right)\cdot\frac{1}{5}$.

---

38. Упростить выражение:

1) $1{,}2a-(0{,}2a+b)$; 2) $0{,}7x-(2y-0{,}7x)$;

3) $0{,}1(x-2y)+0{,}2(x+y)$; 4) $\frac{2}{3}(m-3n)+\frac{1}{3}(n-2m)$;

5) $8(a+3b)-9(a+b)$; 6) $3(c+d)-7(d+2c)$.

39. Доказать, что:

1) удвоенная сумма чисел $3a$ и $7b$ равна одной трети суммы чисел $18a$ и $42b$;

2) число, противоположное разности чисел $0{,}2x$ и $0{,}3y$, равно одной десятой разности чисел $3x$ и $2y$.

40. Сколько десятичных знаков после запятой содержит:

1) сумма чисел 0,048 и 3,17;
2) разность чисел 2,0017 и 5,01;
3) $\frac{1}{10}$ суммы чисел 44,95 и 0,045;
4) $\frac{1}{100}$ разности чисел 1048 и 945?

41*. Три пионерских отряда собирали макулатуру. Первый отряд собрал 80% того, что собрал второй отряд, а третий отряд собрал 50% того, что собрали пионеры первых двух отрядов. Какой отряд собрал больше макулатуры?

§ 5. ПРАВИЛА РАСКРЫТИЯ СКОБОК

1. Алгебраическая сумма.

Задача 1. В двадцатиэтажном здании движется лифт. С восьмого этажа он передвинулся на 6 этажей вниз, затем на 12 этажей вверх, на 4 этажа вниз, на 7 этажей вверх, на 13 этажей вниз. На каком этаже находится лифт?

△ Чтобы найти, на каком этаже находится лифт, нужно вычислить значение числового выражения $8-6+12-4+7-13$. Это значение равно 4. Значит, лифт находится на четвертом этаже. ▲

Выражение

$$8-6+12-4+7-13$$

называют *алгебраической суммой*. Такое название объясняется тем, что это выражение можно записать в виде суммы

$$8+(-6)+12+(-4)+7+(-13).$$

Приведем еще примеры алгебраических сумм:

$$3-(-7)+(-2),\ 2a-7b+c-d,\ a+(-b)-(-c).$$

Алгебраическая сумма — это запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединенных знаками «+» или «—».

Заменяя вычитание сложением, алгебраическую сумму $a+(-b)-(-c)$ можно записать по-другому:

$$a+(-b)-(-c)=a+(-b)+c.$$

Обычно алгебраические суммы вида $3-(-7)+(-2)$, $a+(-b)-(-c)$ записывают короче так:

$$3-(-7)+(-2)=3+7-2;\ a+(-b)-(-c)=a-b+c.$$

В алгебраической сумме $3+7-2$ слагаемыми являются числа 3, 7 и -2, так как $3+7-2=3+7+(-2)$; в алгебраической сумме $a-b+c$ слагаемыми являются a, $-b$, c, так как $a-b+c=a+(-b)+c$; в алгебраической сумме $2a-7b-c$ слагаемыми являются $2a$, $-7b$, $-c$.

2. Раскрытие скобок и заключение в скобки.

Преобразование выражений, содержащих скобки, перед которыми стоит знак «+», основывается на следующих свойствах сложения:

$$a+(b+c)=a+b+c, \qquad a+(b-c)=a+b-c.$$

Эти равенства позволяют сформулировать *первое правило раскрытия скобок.*

(!) *Если к алгебраическому выражению прибавляется алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы.*

Например:

1) $14+(7-13+2)=14+7-13+2;$
2) $a+(b+c-d)=a+b+c-d;$
3) $(a-b)+c=a-b+c.$

Преобразование выражений, содержащих скобки, перед которыми стоит знак «—», основывается на следующих свойствах вычитания:

$$-(-a)=a,\ -(a+b)=-a-b,$$
$$a-(b+c)=a-b-c,$$
$$a-(b-c)=a-b+c.$$

Из этих равенств следует *второе правило раскрытия скобок.*

(!) *Если из алгебраического выражения вычитается алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы на противоположный.*

Например:

1) $14-(7-13+2)=14-7+13-2;$
2) $a-(b+c-d)=a-b-c+d;$
3) $-(a-b)+c=-a+b+c.$

Задача 2. Раскрыть скобки и упростить:

$$3x+(5-(8x+3)).$$

△ $3x+(5-(8x+3))=3x+5-(8x+3)=$
$=3x+5-8x-3=2-5x.$ ▲

Иногда полезно заключить несколько слагаемых в скобки. Например:

1) $108-137+37=108-(137-37)=108-100=8;$
2) $a+b-c+d=a+(b-c+d).$

Здесь перед скобками поставлен знак «+», поэтому знаки всех слагаемых, заключенных в скобки, сохраняются.

3) $a-b-c+d=a-(b+c-d).$

Здесь перед скобками поставлен знак «—», поэтому знаки всех слагаемых, заключаемых в скобки, изменены на противоположные.

Упражнения

42. Вычислить, используя свойства арифметических действий:

1) $4{,}385+(0{,}407+5{,}615)$;   2) $7\frac{7}{8}+\left(\frac{13}{18}-3\frac{7}{8}\right)$;

3) $0{,}213-(5{,}8+3{,}413)$;   4) $10\frac{4}{17}-\left(3\frac{4}{9}-1\frac{13}{17}\right)$.

Раскрыть скобки (43—44).

43. 1) $a+(2b-3c)$;   2) $a-(2b-3c)$;
3) $a-(2b+3c)$;   4) $-(a-2b+3c)$.

44. 1) $a+(b-(c-d))$;   2) $a-(b-(c-d))$;
3) $a-((b-c)-d)$;   4) $a-(b+(c-(d-k)))$.

45. Раскрыть скобки и упростить:
1) $3a-(a+2b)$;   2) $5x-(2y-3x)$;
3) $3m-(5m-(2m-1))$;   4) $4a+(2a-(3a+2))$.

46. Заключить в скобки все слагаемые, начиная с числа m или $(-m)$, поставив перед скобками знак «+»:
1) $a+2b+m-c$;   2) $a-2b+m+c$;
3) $a-m-3c+4d$;   4) $a-m+3b^2-2a^3$.

47. Заключить в скобки все слагаемые, начиная с числа m или $(-m)$, поставив перед скобками знак «—»:
1) $2a+3b+m-c$;   2) $2a+b+m+3c$;
3) $c-m-2a^2+3b^2$;   4) $a-m+3b^2-2a^3$.

---

48. Упростить:
1) $(5a-2b)-(3b-5a)$;   2) $(6a-b)-(2a+3b)$;
3) $7x+3y-(-3x+3y)$;   4) $8x-(3x-2y)-5y$.

49. Найти числовое значение выражения, предварительно упростив его:
1) $(2c+5d)-(c+4d)$ при $c=0{,}4$, $d=0{,}6$;
2) $(3a-4b)-(2a-3b)$ при $a=0{,}12$, $b=1{,}28$;
3) $(7x+8y)-(5x-2y)$ при $x=-\frac{3}{4}$, $y=0{,}025$;
4) $(5c-6b)-(3c-5b)$ при $c=-0{,}25$, $b=2\frac{1}{2}$.

50. Пусть m и n — натуральные числа. Доказать, что:
1) разность чисел $8m-n$ и $5m-4n$ делится на 3;
2) сумма числа $5m-3n$ и числа, противоположного числу $m-7n$, делится на 4.

51. Доказать, что при любых значениях a значение выражения $2(3a-5)-(7-(5-6a))$ отрицательно.

52*. В трехзначном числе содержится a сотен, b десятков и c единиц.
1) Составить и упростить сумму данного числа и числа, записанного теми же цифрами, но взятыми в обратном порядке.
2) Составить разность данного числа и числа, записанного теми же цифрами, но взятыми в обратном порядке. Доказать, что полученная разность делится на 9 и на 11.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

53. Вычислить значение числового выражения:

1) $$\frac{\left(2{,}4-\frac{3}{4}\right)\cdot 0{,}6}{\left(\frac{3}{8}+0{,}25\right)\cdot 0{,}4}+\frac{7}{6-5\frac{13}{20}}+1{,}04;$$

2) $$\frac{\left(3{,}25-\frac{3}{4}\right)\cdot 6{,}25}{(2-0{,}75):\frac{4}{5}}+\frac{\left(5{,}5-3\frac{3}{4}\right):5}{(2-0{,}8)\cdot\frac{3}{4}}.$$

54. Записать:
1) удвоенную разность чисел a и b;
2) удвоенное произведение чисел m и n;
3) частное от деления суммы чисел n и m на их разность;
4) произведение суммы чисел a и b и их разности.

55. Искусственный спутник Земли движется со скоростью 8000 м/с. За какое время он пройдет путь, равный 48 000 км; 1 440 000 км?

56. Реактивный самолет расходует a литров горючего на 1000 км пути.
1) Сколько литров горючего расходуется на 3000; 8000; 500; s километров пути?
2) Какой путь пролетит самолет при расходе горючего $5a$; $0{,}1a$ литров?

57. Для охлаждения доменной печи через ее стенки ежеминутно пропускается 26 кубометров воды. Сколько кубометров воды проходит через стенки доменной печи за одни сутки? за пять суток? за m суток?

58. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $0{,}5(a-2b)-(3b+1{,}5a)$ при $a=0{,}48$, $b=0{,}03$;

2) $\left(\frac{1}{3}a+b\right)-\frac{2}{3}(a-1{,}5b)$ при $a=3$, $b=-3$.

59. Расход электроэнергии за сутки холодильника «ЗИЛ» равен 1,9 кВт·ч (киловатт-час), а цветного телевизора «Темп» — 1 кВт·ч (из расчета работы телевизора в среднем 4 ч в день). Сколько стоит электроэнергия, потребленная обоими приборами за 30 дней, если 1 кВт·ч стоит 4 к.?

60. Не вычисляя, показать, что:

1) произведение чисел 2,004 и 1,745 больше 2;

2) произведение чисел 1,2438 и 0,8 меньше 2.

61. Найти числовое значение алгебраического выражения:

1) $\frac{2mn(n+k)}{n-k}$ при $m=k=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{2}$;

2) $\frac{(3p+l)2p}{p-l}+\frac{1}{3}$ при $p=\frac{1}{3}$, $l=1$.

62. Сторона квадрата равна a. Найти периметр и площадь прямоугольника, у которого ширина меньше стороны этого квадрата на 4 единицы, а длина больше стороны квадрата на 8 единиц.

63. Вклад в сберегательный банк составил 1450 р. В год сберегательный банк начисляет вкладчику 2% от суммы вклада. Какой станет сумма вклада через год?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Вычислить:

а) $(17{,}2\cdot 4{,}01+4{,}01\cdot 32{,}8):1\frac{2}{3}$;

б) $\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2\frac{2}{3}-25\cdot 0{,}03\cdot 4$.

2. Упростить выражение $3(2y-x)-2(y-3x)$ и найти его числовое значение при $x=-\frac{2}{9}$, $y=0{,}25$.

3. Для пионерского лагеря купили 10 барабанов и 5 горнов. Один барабан стоит a рублей, а один горн — b рублей. Написать формулу стоимости всей покупки.

64. Записать в виде алгебраического выражения:

1) сумму двух последовательных натуральных чисел, меньшее из которых равно n;

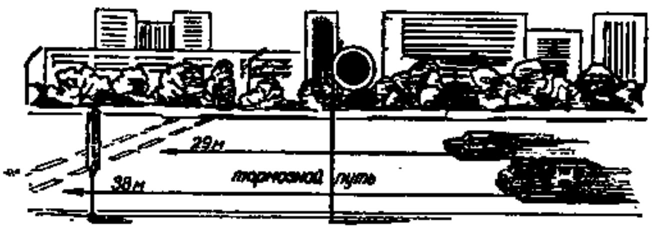
2) произведение двух последовательных натуральных чисел, большее из которых равно m;

3) сумму трех последовательных четных натуральных чисел, меньшее из которых равно $2k$;

4) произведение трех последовательных нечетных натуральных чисел, меньшее из которых равно $2p+1$.

65. Колхозник 3 км пути прошел пешком и проехал на автобусе t часов со скоростью 40 км/ч. Написать формулу пути s, проделанного колхозником. Из этой формулы выразить t через s.

66. При увеличении скорости движения автомобиля вдвое его тормозной путь увеличивается в 4 раза. При скорости 30 км/ч тормозной путь «Запорожца» равен 7,2 м, а грузового автомобиля — 9,5 м. Найти тормозной путь этих автомобилей при скорости 60 км/ч.



67. Туристы проплыли на плоту 6 ч со скоростью v км/ч. Затем они прошли по берегу 15 км. Написать формулу s пути, который преодолели туристы. Выразить из этой формулы v через s.

68. Верно ли утверждение:

1) если разность двух натуральных чисел — четное число, то их сумма также число четное;

2) если разность двух натуральных чисел — нечетное число, то их сумма также число нечетное?

69. Доказать, что сумма трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

70. Велосипедист едет со скоростью v километров в час. Ему нужно добраться до села, расположенного в s километрах

от пункта отправления. Сколько ему еще потребуется времени, чтобы приехать в село, если он уже проехал 3 км? Успеет ли он доехать до села за 2,5 ч, если он уже проехал 3 км и $s=36$, $v=12$?

71*. Сколько монет по 2 к. и 5 к. нужно взять, чтобы набрать 23 к.?

72*. В магазин привезли n метров ткани по 6 р. за метр и m метров ткани по 5 р. за метр — всего на сумму 510 р. Сколько метров ткани по 5 р. и по 6 р. привезли в магазин (n и m — натуральные числа), если $n>45$, $m>40$?

73.** Сумма цифр двузначного числа меньше 10. Доказать, что результат умножения такого числа на 11 получится, если между цифрами этого числа вставить их сумму. Например, $53\cdot 11=583$.

Глава II
УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

§ 6. УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ

Задача. Конверт с новогодней открыткой стоит 17 к. Конверт дешевле открытки на 5 к. Найти стоимость открытки.

△ Пусть открытка стоит x копеек, тогда конверт стоит $(x-5)$ копеек. По условию задачи

$$x+(x-5)=17,$$

откуда $2x-5=17$, $2x=22$, $x=11$. ▲

В равенстве $x+(x-5)=17$ буква x обозначает неизвестное число, или, короче, *неизвестное*.

(!) ***Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением.***

Выражение, стоящее слева от знака равенства, называется *левой частью уравнения*, а выражение, стоящее справа от знака равенства,— *правой частью уравнения*. Каждое слагаемое левой или правой части уравнения называется *членом уравнения*.

В уравнении $2x-5=17$ левая часть $2x-5$; правая часть 17. При $x=11$ левая часть этого уравнения равна 17, так как $2\cdot 11-5=17$; правая часть также равна 17. Итак, при $x=11$ это уравнение обращается в верное равенство $2\cdot 11-5=17$. Число 11 называют *корнем* данного *уравнения*.

(!) ***Корнем уравнения называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство.***

Например, число 1 является корнем уравнения

$$2x+3=5,$$

так как $2\cdot 1+3=5$ — верное равенство.

Уравнение может иметь два корня, три корня и т. д. Например, уравнение

$$(x-1)(x-2)=0$$

имеет два корня: 1 и 2, так как при $x=1$ и при $x=2$ это уравнение обращается в верное равенство, а при других значениях x левая часть уравнения не равна нулю. Уравнение

$$(x-3)(x+4)(x-5)=0$$

имеет три корня: 3, -4 и 5.

Уравнение может иметь бесконечно много корней. Например, уравнение

$$2(x-1)=2x-2$$

имеет бесконечно много корней: любое значение x является корнем этого уравнения, так как при любом x левая часть уравнения равна правой части.

Уравнение может и не иметь корней. Например, уравнение $2x+5=2x+3$ не имеет корней, так как при любом значении x левая часть этого уравнения больше правой.

(!) ***Решить уравнение** — это значит найти все его корни или установить, что их нет.*

В простейших случаях легко подобрать значение x, которое является корнем уравнения. Например, легко увидеть, что корень уравнения $2x+1=3$ — число 1. Однако это не всегда так. Например, довольно трудно догадаться, что уравнение

$$\frac{x-6}{5}+\frac{4(x+3)}{2}-1=\frac{x-1}{2}+3x-\frac{7x-1}{10}$$

обращается в верное равенство при $x=7$. Поэтому важно научиться решать уравнения.

Решение многих практических задач сводится к решению уравнений, которые можно преобразовать в уравнение

$$ax=b, \qquad (1)$$

где a и b — заданные числа, x — неизвестное. Уравнение (1) называют *линейным уравнением*. Например, уравнения $3x=1$, $-2x=3$, $\frac{3}{5}x=-\frac{1}{2}$ являются линейными.

Упражнения

74. Записать в виде равенства:
1) число 34 на 18 больше числа x;
2) число 56 в x раз больше числа 14;
3) удвоенная разность чисел x и 3 равна 4;
4) полусумма чисел x и 5 равна их произведению.

75. Какие из чисел 3; -2 являются корнями уравнения:
1) $3x=-6$; 2) $x+3=6$;
3) $4x-4=x+5$; 4) $5x-8=2x+4$?

76. (Устно.) При каких значениях x уравнение обращается в верное равенство:
1) $x+5=-3$; 2) $4-x=-1$; 3) $2x-1=0$;
4) $3x+2=0$; 5) $\frac{x}{5}=\frac{6}{7}$; 6) $\frac{3}{8}=\frac{x}{2}$?

77. Есть ли среди чисел -1; $\frac{1}{2}$; 0 корень уравнения:
1) $4(x-1)=2x-3$; 2) $3(x+2)=4+2x$;
3) $7(x+1)-6x=10$; 4) $5(x+1)-4x=4$?

---

78. Составить уравнение, корнем которого является число:
1) 5; 2) 3; 3) 0; 4) -4.

79. Подобрать число a так, чтобы уравнение $4x-3=2x+a$ имело корень:
1) $x=1$; 2) $x=-1$; 3) $x=\frac{1}{2}$; 4) $x=0{,}3$.

80. Выяснить, имеет ли корни уравнение при заданном значении a:
1) $3x+a=3x+5$ при $a=1$; 2) $\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{2}x+a$ при $a=4$.
Указать такое значение a, при котором данное уравнение имеет корни.

81. Записать данное утверждение в виде равенства и найти значение x, при котором равенство верно:
1) число x составляет 18% числа 75;
2) число 15 составляет 25% числа x.

82. Найти значения x, при которых верно равенство:
1) $x(x-2)=0$; 2) $2x(1-x)=0$;
3) $x(x+3)(x-4)=0$; 4) $(3-x)(x+2)(x-1)=0$.

83*. Найти все значения x, при которых верно равенство:
1) $|x|=0$; 2) $|x|=2$; 3) $|x|=\frac{1}{3}$; 4) $|x-1|=2$.

§ 7. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ, СВОДЯЩИХСЯ К ЛИНЕЙНЫМ

Решения уравнений с одним неизвестным, которые сводятся к линейным, основаны на свойствах верных равенств. Напомним эти свойства.

Словесная формулировка	Запись в общем виде	Пример
1. Если к обеим частям верного равенства прибавить одно и то же число или из обеих частей верного равенства вычесть одно и то же число, то получится верное равенство.	Если $a=b$ и l — любое число, то $a+l=b+l$, $a-l=b-l$.	$7=7$, $7+2=7+2$, $7-2=7-2$.
2. Если обе части верного равенства умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число, то получится верное равенство.	Если $a=b$ и $m\neq 0$, то $a\cdot m=b\cdot m$, $a:m=b:m$.	$27=27$, $27\cdot 3=27\cdot 3$, $27:3=27:3$.

Из первого свойства следует, что слагаемое можно переносить из одной части равенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный.

○ Пусть $a=b+m$. Тогда

$$a+(-m)=b+m+(-m);\ a-m=b.$$

Для того чтобы обосновать известный из курса математики V — VI классов способ решения уравнений, проведем рассуждения на конкретном примере. При этом покажем, как применяются свойства равенств к решению уравнений.

Задача 1. Решить уравнение $9x-23=5x-11$.

△ Предположим, что x — корень данного уравнения, т. е. x — такое число, при котором уравнение обращается в верное равенство. Воспользуемся свойствами верных равенств.

Перенесем член $5x$ со знаком «минус» в левую часть, а член -23 перенесем в правую часть равенства со знаком «плюс».

В результате также получится верное равенство

$$9x-5x=23-11.$$

Приведем подобные члены в обеих частях этого равенства, получим:

$$4x=12.$$

Разделив обе части последнего равенства на 4, найдем $x=3$.

Итак, предположив, что уравнение имеет корень x, мы получили $x=3$.

Таким образом, если данное уравнение имеет корень, то он может быть равен только числу 3.

Проверим, является ли число 3 на самом деле корнем данного уравнения. Подставим $x=3$ в левую и правую части уравнения и проведем вычисления:

$$9\cdot 3-23=4,\quad 5\cdot 3-11=4.$$

При $x=3$ уравнение обратилось в верное равенство:

$$9\cdot 3-23=5\cdot 3-11.$$

Следовательно, $x=3$ — единственный корень данного уравнения. ▲

При решении этой задачи были использованы следующие *основные свойства уравнений:*

Свойство 1. ***Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.***

Свойство 2. ***Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.***

Применяя эти свойства, уравнения, сводящиеся к линейным, обычно решают так:

1) переносят члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестного, в правую (свойство 1);

2) приводят подобные члены;

3) делят обе части уравнения на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

Задача 2. Решить уравнение

$$2(x+3)-3(x+2)=5-4(x+1).$$

△ Упростим левую и правую части уравнения: раскроем скобки и приведём подобные члены. Получим:

$$2x+6-3x-6=5-4x-4,\quad -x=-4x+1.$$

Следовательно, $3x=1$, откуда $x=\frac{1}{3}$. ▲

Задача 3. Решить уравнение $\frac{5x}{2}-\frac{x-3}{3}=1+\frac{x-5}{6}$.

△ Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на 6, получим:

$$\frac{5x}{2}\cdot 6-\frac{x-3}{3}\cdot 6=1\cdot 6+\frac{x-5}{6}\cdot 6,$$

$$15x-2(x-3)=6+(x-5).$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$15x-2x+6=6+x-5,\quad 13x+6=x+1,$$

откуда

$$12x=-5,\quad x=-\frac{5}{12}. \ ▲$$

При решении уравнения с одним неизвестным (как, например, в задачах 2 и 3) переходят от данного уравнения к более простому, имеющему те же корни. Поэтому проверку полезно делать только для того, чтобы убедиться в правильности вычислений.

В рассмотренных примерах каждое уравнение имело один корень. Однако может оказаться, что уравнение с одним неизвестным не имеет корней или любое значение неизвестного является корнем уравнения. Приведем примеры таких уравнений.

Задача 4. Решить уравнение $2(x+1)-1=3-(1-2x)$.

△ Упростим обе части уравнения:

$$2x+2-1=3-1+2x,\qquad 2x+1=2+2x,$$

откуда

$$2x-2x=2-1,\qquad 0\cdot x=1.$$

Это уравнение не имеет корней, так как левая часть $0\cdot x$ равна нулю при любом x, а значит, не равна 1.

Ответ. Корней нет. ▲

Задача 5. Показать, что любое значение x является корнем уравнения

$$3(1-x)+2=5-3x.$$

△ Упростим уравнение:

$$3-3x+2=5-3x,$$
$$5-3x=5-3x.$$

Последнее равенство является верным при любом значении x. Следовательно, любое значение x является корнем уравнения. ▲

Упражнения

84. (Устно.) Решить уравнение:
1) $x+3=5$; 2) $x+8=11$;
3) $x-0,25=0,75$; 4) $x-1,3=2,7$.

85. (Устно.) Решить уравнение:
1) $-2x=10$; 2) $18x=-9$; 3) $10x=0$; 4) $15x=-15$.

Решить уравнение (86—94).

86. 1) $9x=\frac{2}{5}$; 2) $-3x=2\frac{1}{7}$; 3) $-\frac{1}{2}x=3$; 4) $\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}$.

87. 1) $0,3x=6$; 2) $1,3x=-1,69$; 3) $0,7x=49$; 4) $-10x=0,5$.

88. 1) $25x-1=9$; 2) $7x+8=11$;
3) $3x-5=10-x$; 4) $4x+4=x+5$.

89. 1) $5x+3(3x+7)=35$; 3) $8y-9-(4y-5)=12y-(4+5y)$;
2) $8x-(7x+8)=9$; 4) $4+8y+8=2y-(10+7y)+9$.

90. 1) $5(x-3)-2(x-7)+7(2x+6)=7$;
2) $11(y-4)+10(5-3y)-3(4-3y)=-6$;
3) $5(8z-1)-7(4z+1)+8(7-4z)=9$;
4) $10(3x-2)-3(5x+2)+5(11-4x)=25$.

91. 1) $\frac{11}{7}=\frac{2-x}{5}$; 2) $\frac{3x}{5}=\frac{6+x}{3}$;
3) $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=8$; 4) $\frac{y}{3}+\frac{y}{4}=14$.

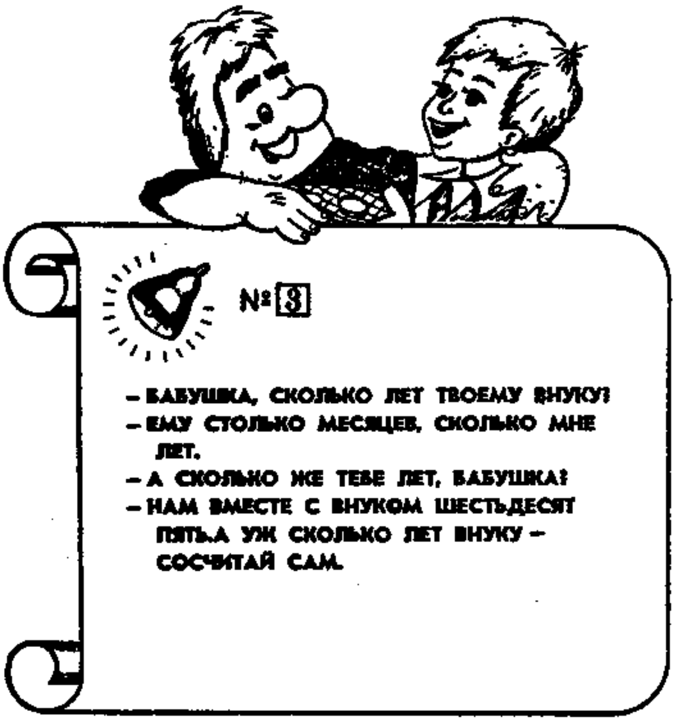
92. 1) $0,71x+1,98=0,37x-1,76$;
2) $0,18y-7,4=0,05y-5,71$;
3) $5(5x-1)-2,7x+0,2x=6,5-0,5x$;
4) $0,36x-0,6=0,3(0,4x-1,2)$.

93. 1) $\frac{x-4}{5}=9+\frac{2x+4}{9}$; 2) $2-\frac{3x-7}{4}+\frac{x+17}{5}=0$;
3) $\frac{8-y}{6}+\frac{5-4y}{3}=\frac{y+6}{2}$; 4) $\frac{4x+7}{5}+\frac{3x-2}{2}-\frac{5x-2}{2}=32$.

94. 1) $\frac{4x-51}{3}-\frac{17-3x}{4}=\frac{x+5}{2}$; 2) $\frac{3x-7}{4}-\frac{9x+11}{8}=\frac{3-x}{2}$;
3) $\frac{9x-5}{2}-\frac{3+5x}{3}-\frac{8x-2}{4}=2$; 4) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}=\frac{3x-4}{3}$.

95. Показать, что уравнение не имеет корней:
1) $28-20x=2x+25-16x-12-6x$;
2) $25x-17=4x-5-13x+14+34x$;
3) $\frac{x-1}{3}+\frac{5x+2}{12}=\frac{5+3x}{4}$; 4) $\frac{2x+1}{3}-\frac{7x+5}{15}=\frac{x-2}{5}$.

2 Зак. 290



96. Показать, что любое значение x является корнем уравнения:

1) $10-4x+3=9x-2-6x+9-7x+6$;
2) $9x+4-5x=8+7x-9-3x+5$;
3) $6(1{,}2x-0{,}5)-1{,}3x=5{,}9x-3$;
4) $8(1{,}3x+0{,}25)-6{,}6x=3{,}8x+2$.

---

97. Составить и решить уравнение:

1) если число x уменьшить на 26%, то получится число 7,4;
2) если число x увеличить на 20%, то получится число 9,6;
3) произведение чисел $3\frac{1}{4}$ и x в 2 раза больше суммы чисел 1 и x;

4) сумма чисел $\frac{7}{12}$ и $2x$ в 3 раза меньше одной четвертой числа x.

98. Решить уравнение, используя свойства пропорции:

1) $\frac{x}{1{,}5}=\frac{1{,}6}{0{,}3}$; 2) $\frac{0{,}07}{0{,}09}=\frac{x}{1{,}8}$;
3) $\frac{3x}{1{,}7}=\frac{0{,}21}{6{,}8}$; 4) $\frac{1{,}08}{7{,}6}=\frac{5x}{3{,}8}$.

99. Решить уравнение, если a и b — заданные числа, отличные от нуля:

1) $ax-3=b$; 2) $4+bx=a$;
3) $b=a(x-3)$; 4) $4=a-(bx-1)$;
5) $\frac{2x-a}{b}=3$; 6) $\frac{1-bx}{a}=1$.

100*. Решить уравнение:

1) $|x|=2{,}5$; 2) $|x|=3$; 3) $2|x|=0{,}48$;
4) $5|x|=1{,}15$; 5) $|2x|=1{,}4$; 6) $|3x|=0{,}03$.

§ 8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ

Применение уравнений позволяет упростить решение многих задач. При этом решение задачи обычно состоит из двух этапов:

1) составление уравнения по условиям задачи;
2) решение полученного уравнения.

Рассмотрим задачу.

З а д а ч а. Теплоход с туристами отправился от пристани вниз по течению реки и должен вернуться обратно через 5 ч. Скорость течения реки 3 км/ч, скорость теплохода в стоячей воде 18 км/ч. На какое расстояние туристы отплывут от пристани, если перед возвращением они пробудут на берегу 3 ч?

△ 1) Пусть искомое расстояние x километров. Это расстояние вниз по течению теплоход проходит со скоростью $18+3=21$ км/ч и затрачивает $\frac{x}{21}$ ч. Возвращаться теплоход будет со скоростью $18-3=15$ км/ч и затратит на возвращение $\frac{x}{15}$ ч. На берегу туристы пробудут 3 ч. Следовательно, вся поездка займет $\left(\frac{x}{21}+\frac{x}{15}+3\right)$ ч, что по условию задачи равно 5 ч. Таким образом мы получили для определения неизвестного расстояния x следующее уравнение:

$$\frac{x}{21}+\frac{x}{15}+3=5.$$

2) Перейдем теперь к решению уравнения

$$\frac{x}{21}+\frac{x}{15}=2.$$

Умножая обе части этого уравнения на 105 (наименьшее общее кратное чисел 21 и 15), получаем:

$$5x+7x=210,\ 12x=210,$$

откуда $x=17{,}5$.

Ответ. Теплоход отплывет от пристани на 17,5 км. ▲

На первом этапе решения задачи (т. е. при составлении уравнения) необходимо было знать, что скорости теплохода и реки при движении по течению складываются, а при движении против течения вычитаются и что путь, деленный на скорость, есть время движения.

На втором этапе (т. е. при решении полученного уравнения) потребовалось применить изученные в предыдущем параграфе свойства уравнений.

Наконец, для получения ответа нужно было возвратиться к условию задачи и использованному обозначению.

Чтобы проверить, правильно ли решена задача, следует, пользуясь условиями данной задачи, составить другую, в которой найденный результат становится известным, а какое-нибудь данное нужно найти. Чтобы проверить решение задачи, можно составить, например, такую задачу:

Теплоход с туристами отправился от пристани вниз по течению реки, проплыл 17,5 км и после трехчасовой стоянки вернулся обратно. Скорость течения реки 3 км/ч, скорость теплохода в стоячей воде 18 км/ч. Сколько времени длилась поездка?

Упражнения

101. Ученик задумал число. Если его умножить на 4, а к произведению прибавить 8 и полученную сумму разделить на 2, то получится 10. Какое число задумал ученик?

102. 1) Поезд имеет в своем составе цистерны, платформы и товарные вагоны. Цистерн на 4 меньше, чем платформ, и в 2 раза меньше, чем товарных вагонов. Сколько в составе поезда отдельно цистерн, платформ и товарных вагонов, если их общее число равно 68?

2) Три цеха изготовили 869 деталей. Второй цех изготовил деталей в 3 раза больше, чем первый, а третий — на 139 меньше, чем второй. Сколько деталей изготовил каждый цех отдельно?

103. В кассе лежит 98 монет по 1, 2, 3 к. Монет по 2 к. на 10 больше, чем монет по 1 к., а монет по 3 к. в 7 раз больше, чем монет по 2 к. Сколько в кассе монет по 1, 2, 3 к.?

104. Найти три последовательных нечетных числа, сумма которых равна 81.

105. Имеются четыре последовательных четных числа. Если из удвоенной суммы крайних вычесть положительную разность средних чисел, то получится 34. Найти эти числа.

106. 1) Бригада лесорубов ежедневно перевыполняла норму на 16 м^3, поэтому недельную норму (6 рабочих дней) она выполнила за 4 дня. Сколько кубометров леса заготовляла бригада в день?

2) В цехе поставили автомат, производительность которого была на 8 деталей в час выше производительности рабочего. После 2 ч работы автомат выполнил шестичасовую норму рабочего. Какова производительность автомата?

107. 1) Матери 50 лет, дочери 28. Сколько лет тому назад дочь была в 2 раза моложе матери?

2) Отцу 40 лет, сыну 16. Через сколько лет отец будет в 2 раза старше сына?

108. 1) В первом мешке было 50 кг сахара, а во втором — 80 кг. Из второго мешка взяли сахара в 3 раза больше, чем из первого, и тогда в первом мешке сахара осталось вдвое больше, чем во втором. Сколько килограммов сахара взяли из каждого мешка?

2) В одном элеваторе было зерна в 2 раза больше, чем в другом. Из первого элеватора вывезли 750 т зерна, на второй элеватор привезли 350 т, после чего в обоих элеваторах зерна стало поровну. Сколько зерна было первоначально в каждом элеваторе?

109. 1) Бригада должна была выполнить заказ за 10 дней. Ежедневно перевыполняя норму на 27 деталей, бригада за 7 дней работы не только выполнила задание, но еще изготовила дополнительно 54 детали. Сколько деталей в день изготовляла бригада?

2) Заказ по выпуску машин завод должен был выполнить за 15 дней. Но уже за 2 дня до срока завод не только выполнил план, но и выпустил сверх плана еще 6 машин, так как ежедневно выпускал по 2 машины сверх плана. Сколько машин должен был выпускать завод по плану?

110. 1) Лодка шла против течения реки 4,5 ч и по течению 2,1 ч. Найти скорость лодки в стоячей воде, если она прошла всего 52,2 км, а скорость течения реки равна 3 км/ч.

2) Лодка шла по течению реки 2,4 ч и против течения 3,2 ч. Путь, пройденный лодкой по течению, оказался на 13,2 км длиннее пути, пройденного против течения. Найти скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3,5 км/ч.

111. 1) На школьных соревнованиях по плаванию один ученик проплыл некоторое расстояние по течению реки за 24 с и то же расстояние против течения за 40 с. Определить собственную скорость пловца, считая ее постоянной от начала и до конца заплыва, если скорость течения реки равна 0,25 м/с.

2) Расстояние между двумя пунктами катер прошел по течению за 3 ч 30 мин, а против течения за 6 ч 18 мин. Определить расстояние между этими пунктами, если скорость течения реки равна 2,4 км/ч.

112*. 1) Из одного пункта вначале вышел пешеход, а через 1,5 ч после его выхода в том же направлении выехал велосипедист. На каком расстоянии от пункта отправления велосипедист догнал пешехода, если пешеход шел со скоростью 4,25 км/ч, а велосипедист ехал со скоростью 17 км/ч?

2) Два теплохода вышли одновременно из одного пункта и идут в одном направлении. Первый теплоход за каждые 1,5 ч проходит 37,5 км, а второй за каждые 2 ч проходит 45 км. Через сколько времени первый теплоход будет находиться от второго на расстоянии 10 км?

113*. 1) Кооператив продавал пальто и куртки. Куртка стоила на 150 р. дешевле пальто. На сезонной распродаже цена на куртки была снижена на 20%, а на пальто — на 10%, и теперь куртку и пальто можно было купить за 645 р. Сколько стоили куртка и пальто до распродажи?

2) Один рабочий в день выпускал на 50 деталей меньше другого. Когда выработка первого повысилась на 1% в день, а второго — на 2%, они стали вместе выпускать в день 254 детали. Сколько деталей в день выпускал каждый рабочий первоначально?

114*. 1) Туристы за первый час прошли 3 км. Если бы они продолжали двигаться с той же скоростью, то опоздали бы к месту сбора на 40 мин, поэтому они увеличили скорость на $\frac{1}{3}$ и пришли к месту сбора за 45 мин до назначенного срока. Какое расстояние прошли туристы до места сбора и за какое время?

2) Первый час автомобилист ехал со скоростью 50 км/ч и рассчитал, что если он и дальше будет ехать с той же скоростью, то опоздает в город на полчаса. Он увеличил скорость на 20% и прибыл в город вовремя. Какой путь проехал автомобилист и сколько времени он находился в пути?

115*. 1) Из двух пунктов, расстояние между которыми 340 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость одного на 5 км/ч больше скорости другого. Найти скорости поездов, если известно, что через 2 ч после начала движения расстояние между ними было 30 км.

2) Из городов A и B, расстояние между которыми 230 км, одновременно выехали навстречу друг другу два мотоциклиста. Через 3 ч после начала движения расстояние между ними было 20 км. Найти скорости мотоциклистов, если скорость одного на 10 км/ч меньше скорости другого.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

Решить уравнение (116—117).

116. 1) $3y+5=4\left(9-\frac{y}{2}\right)$; 2) $8\left(11-\frac{3}{4}z\right)=16z-44$;

3) $3\left(5+\frac{x}{2}\right)=4+2x$; 4) $2\left(3-\frac{x}{3}\right)=5+x$.

117. 1) $\frac{x-2}{4}-\frac{1}{2}=\frac{x+7}{6}$; 2) $\frac{x-7}{6}=\frac{x+1}{2}-3$;

3) $\frac{2(3x-1)}{5}=4-\frac{x+2}{2}$; 4) $\frac{1}{2}-\frac{3x}{4}=\frac{2(3-x)}{5}$.

118. 1) На одной ферме был сделан запас силоса 7 т 680 кг, а на второй — 9 т 600 кг. На первой ферме ежедневно расходуется 352 кг, а на второй — 480 кг силоса. Через сколько дней запасы силоса на обеих фермах станут равными?

2) На одну овощную базу было завезено 145 т 480 кг картофеля, а на вторую — 89 т 7 ц. С первой базы ежедневно вывозят в магазины по 4 т 40 кг картофеля, а со второй — по 2 т 550 кг. Через сколько дней на второй базе останется картофеля в 2 раза меньше, чем на первой?

119. 1) Собранный виноград предполагалось уложить в ящики, по 9,2 кг в каждый. Вместо этих ящиков взяли другие, вмещающие по 13,2 кг каждый, и тогда потребовалось на 50 ящиков меньше. Сколько килограммов винограда было уложено?

2) Расстояние между станциями A и B пассажирский поезд проходит на 45 мин быстрее, чем товарный. Определить расстояние между этими станциями, если известно, что скорость движения пассажирского поезда равна 48 км/ч, а товарного — 36 км/ч.

120. Масса первого и второго советских искусственных спутников Земли составила 592,4 кг. Первый спутник был легче третьего на 1243,4 кг, второй — на 818,2 кг. Найти массу каждого из трех первых искусственных спутников Земли.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Проверить, есть ли среди чисел 1; 0; —4 корень уравнения $3(x-7)+4=7x-1$.
2. Решить уравнение:
$$2x-3(x-1)=4+2(x-1);$$
$$\frac{x}{3}+\frac{x+1}{4}=2.$$
3. За 15 м ткани двух сортов заплатили 28 р. 40 к. 1 м ткани I сорта стоит 2 р., а 1 м ткани II сорта — 1 р. 80 к. Сколько метров ткани каждого сорта было куплено?

121. При каком значении x значение выражения $3(x-1)-2(3-x)-1$ равно 1?

122. При каком значении x значения выражений $\frac{3x-1}{5}-\frac{5x+1}{6}$ и $\frac{x+1}{8}-3$ равны?

123. Подобрать число a, такое, чтобы уравнение имело корни:

1) $5x-7=5x-a$; 2) $x-(2-x)=2x-a$;

3) $\frac{a}{2}-\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x-(x-8)$; 4) $\frac{x}{3}+\frac{a}{5}=(x+15)-\frac{2}{3}x$.

124. При каких значениях a уравнение $|x|=a$:
1) не имеет корней; 2) имеет только один корень?

25*. Решить уравнение, принимая за неизвестное x; выяснить, при каких значениях a это уравнение имеет корни:

1) $2x-3(x-a)=3+a$; 2) $a+6(x-1)=2a+x$;

3) $\frac{ax-2}{2}=\frac{3-ax}{4}$; 4) $\frac{5-ax}{3}=\frac{7-ax}{6}$;

5) $ax-3(1+x)=5$; 6) $7-ax=2(3+x)$.

126*. Первый час туристы шли на станцию со скоростью 3,5 км/ч. После этого они рассчитали, что если и дальше будут идти с той же скоростью, то придут на час позже намеченного срока. Увеличив скорость на 1,5 км/ч, туристы прибыли на станцию на 30 мин раньше намеченного срока. Какой путь прошли туристы?

127*. Расстояние между двумя поселками равно 9 км. Дорога имеет подъем, равнинный участок и спуск. Скорость пешехода на подъеме равна 4 км/ч, на равнинном участке 5 км/ч, а на спуске 6 км/ч. Сколько километров составляет равнинный участок, если пешеход проходит расстояние от одного поселка до другого и обратно за 3 ч 41 мин?

128*. Яблоки при сушке теряют 84% своей массы. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы приготовить 16 кг сушеных?

129*. Кофе при обработке теряет 12% своей массы. Сколько килограммов свежего кофе надо взять, чтобы получить 4,4 кг кофе, готового к употреблению?

130*. Решить с помощью микрокалькулятора уравнение:
1) $173x+199{,}6=2517{,}8$; 2) $24{,}8x+25{,}47=71{,}35$.

133**. Решить уравнение:
1) $|2x-1|=3$; 2) $|1-5x|=2$;
3) $|x-1|=|x+3|$; 4) $|2x-1|=|x-1|$.

132**. Поезд идет со скоростью 40 км/ч. По наблюдению машиниста встречный поезд, длина которого 75 м, проходит мимо него за 3 с. Какова скорость движения встречного поезда?

Глава III ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ

§ 9. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Посмотрите на рисунки 1 и 2.

Квадрат со стороной 5 единиц содержит $5\cdot5=25$ единичных квадратиков. Куб со стороной 5 единиц содержит $5\cdot5\cdot5=125$ единичных кубиков.

Вы знаете, что произведение $5\cdot5$ обозначают 5^2 (читается: «Пять в квадрате»); произведение $5\cdot5\cdot5$ обозначают 5^3 (читается: «Пять в кубе»):

$$5\cdot5\cdot=5^2, \qquad 5\cdot5\cdot5\cdot=5^3.$$

Такие же обозначения вводятся для произведения любого числа одинаковых множителей, например:

$$\underbrace{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}_{5\text{ раз}}=3^5, \qquad \underbrace{\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{7}}_{9\text{ раз}}=\left(\frac{1}{7}\right)^9, \qquad 0{,}4=(0{,}4)^1$$

Вообще

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}=a^n.$$

Выражение a^n читается так: «Степень числа a с показателем n» — или коротко: «a в степени n».

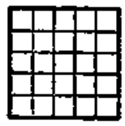


Рис. 1.

! ***Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1,*** *называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:*

$$\boxed{a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}}$$

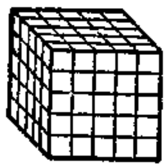


Рис. 2

Степенью числа a с показателем 1 называется само число a:

$$\boxed{a^1=a}.$$

В выражении a^n число a (повторяющийся множитель) называют ***основанием степени***, число n (показывающее, сколько раз повторяется множитель) — ***показателем степени***.

Например:

$$3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3=81,$$

здесь 3 — основание степени, 4 — показатель степени, 81 — значение степени 3^4.

Отметим, что основание степени может быть любым числом, например:

$$2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32;$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{125};$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{81};$$

$$0{,}2^3=0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2=0{,}008;$$

$$(-1)^6=(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=1;$$

$$0^3=0\cdot0\cdot0=0;$$

$$10^4=10\cdot10\cdot10\cdot10=10\,000.$$

Вычисление значения степени называют ***действием возведения в степень***. Это — действие третьей ступени. Напомним, что при вычислении значения выражения, не содержащего скобки, сначала выполняют действия третьей ступени, затем второй (умножение и деление) и, наконец, первой (сложение и вычитание).

Задача. Вычислить: $7\cdot2^4-5\cdot3^2$.

$\triangle$ $7\cdot2^4-5\cdot3^2=7\cdot16-5\cdot9=112-45=67$. $\blacktriangle$

Запись чисел с помощью степени используется во многих случаях, например для записи натуральных чисел в виде суммы

разрядных слагаемых: $3245=3\cdot1000+2\cdot100+4\cdot10+5=3\cdot10^3+2\cdot10^2+4\cdot10+5$.

Для записи больших чисел часто применяются степени числа 10. Так, расстояние от Земли до Солнца, примерно равное 150 млн. км, записывают в виде $1{,}5\cdot10^8$ км; радиус земного шара, приближенно равный 6,37 млн. м, — в виде $6{,}37\cdot10^6$ м, а расстояние от Земли до ближайшей звезды (альфа Центавра) — в виде $4\cdot10^{13}$ км.

Каждое число, большее 10 можно записать в виде $a\cdot10^n$, где $1\leqslant a<10$ и n — натуральное число. Такая запись называется ***стандартным видом числа.***

Например, $4578=4{,}578\cdot10^3$, $45{,}78=4{,}578\cdot10$, $103\,000=1{,}03\cdot10^5$.

С записью чисел в стандартном виде вы будете часто встречаться при изучении физики, химии, при вычислениях на микрокалькуляторе и т. д.

Упражнения

133. Вычислить площадь квадрата со стороной, равной:

1) 5 см; 2) $\frac{1}{2}$ м; 3) $3\frac{1}{4}$ км; 4) 2,7 дм.

134. Вычислить объем куба, длина ребра которого равна:

1) 2 м; 2) 3 дм; 3) $\frac{1}{5}$ км; 4) 0,4 м.

135. Записать произведение в виде степени:

1) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$; 2) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$;

3) $x\cdot x\cdot x\cdot x$; 4) $m\cdot m\cdot m\cdot m\cdot m$;

5) $(x-y)\cdot(x-y)\cdot(x-y)$; 6) $\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}$

Упростить выражение, используя запись произведения в виде степени (136—138).

136. 1) $5\cdot5\cdot8\cdot8\cdot2\cdot2$; 2) $6\cdot6\cdot7\cdot7\cdot3\cdot3\cdot3$;

3) $0{,}3\cdot0{,}3\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}$; 4) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot2{,}3\cdot2{,}3$.

137. 1) $9\cdot9\cdot9\cdot a\cdot a\cdot a$;

2) $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot3\cdot3$;

3) $\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot(x-y)(x-y)$;

4) $\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot(8a-b)(8a-b)(8a-b)$.

138. 1) $\underbrace{3\cdot3\cdot\ldots\cdot3}_{21\text{ раз}}\cdot\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{12\text{ раз}}$; 2) $\underbrace{5\cdot5\cdot\ldots\cdot5}_{16\text{ раз}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{31\text{ раз}}$;

3) $\underbrace{7\cdot7\cdot\ldots\cdot7}_{n\text{ раз}}\cdot\underbrace{p\cdot p\cdot\ldots\cdot p}_{15\text{ раз}}$; 4) $\underbrace{6\cdot6\cdot\ldots\cdot6}_{13\text{ раз}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{k\text{ раз}}$.

139. Упростить выражение:
1) $p\cdot p\cdot p+q\cdot q$; 2) $a\cdot a+b\cdot b\cdot b\cdot b$;
3) $a\cdot a+a\cdot a+a\cdot a$; 4) $x\cdot x\cdot x+x\cdot x\cdot x$.

140. Записать в виде произведения одинаковых множителей:
1) 11^3; 2) $(-1{,}25)^4$; 3) $(2a)^5$; 4) $(a+b)^4$.

Вычислить (141—145).

141. 1) 2^3; 2) 3^2; 3) 10^4; 4) 5^3.

142. 1) 1^5; 2) $(-1)^7$; 3) 0^{15}; 4) 0^5.

143. 1) $(-5)^3$; 2) -5^3; 3) $\left(-2\frac{1}{4}\right)^2$; 4) $-\left(2\frac{1}{4}\right)^2$.

144. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$; 3) $\left(1\frac{2}{7}\right)^2$; 4) $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$.

145. 1) $2(-3)^2$; 2) $-5(-2)^3$; 3) $-\frac{1}{2}(-4)^2$; 4) $-\frac{2}{3}(-3)^2$.

146. Выполнить действия:
1) $12\cdot10^2-5^3\cdot10$; 2) $9^2\cdot2+200\cdot(0{,}1)^2$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot27+(0{,}1)^5\cdot50\,000$; 4) $10^3:40-\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot128$.

147. Записать в виде суммы разрядных слагаемых число:
1) 12 743; 2) 5 043 201; 3) 13 027 030; 4) 12 350 107.

148. Записать число, представленное суммой разрядных слагаемых:
1) $2\cdot10^5+3\cdot10^4+5\cdot10^3+1\cdot10^2+2\cdot10+1$;
2) $3\cdot10^6+5\cdot10^5+3\cdot10^4+2\cdot10^3+3\cdot10+7$,
3) $7\cdot10^5+1\cdot10^3+5\cdot10^2+8$;
4) $1\cdot10^5+1\cdot10^3+1$.

149. Делится ли сумма на 3; на 5:
1) $2\cdot10^4+3\cdot10^2+6$; 2) $4\cdot10^5+3\cdot10^4+2\cdot10+5$;
3) $7\cdot10^3+8\cdot10^2$; 4) $5\cdot10^4+3\cdot10^3+10$?

150. Записать в стандартном виде число:
1) 249; 2) 781; 3) 84 340; 4) 80 005; 5) 3100,2; 6) 127,48.

151. Ребро куба равно k сантиметрам. Записать формулой площадь его поверхности S и объем V.

152. Записать:
1) квадрат числа m;
2) куб числа a;
3) квадрат суммы чисел c и 3;
4) сумму квадратов чисел c и 3.

153. Установить, какое из чисел больше:
1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ или $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; 2) 2^3 или 3^2;
3) $(-0{,}2)^3$ или $(-0{,}2)^2$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

154. Является ли корень уравнения положительным числом:
1) $3x+(-0{,}1)^3=(-0{,}485)^4$;
2) $(-1{,}415)^2+2x=(-9{,}15)^3$;
3) $(-7{,}381)^3-(1-x)=(8{,}0485)^2$;
4) $(10{,}381)^5=(-0{,}012)^5-2x$?

155. Следующие числа записать в стандартном виде:
1) число молекул газа в 1 см^3 при 0 °С и давлении 760 мм рт. ст. равно 27 000 000 000 000 000 000;
2) парсек (единица длины, принятая в астрономии) равен 30 800 000 000 000 км;
3) электронная вычислительная машина может произвести в 1 с 1 000 000 операций.

156. Поверхность земного шара составляет более 510 млн. км^2, объем Земли свыше 1000 млрд. км^3. Записать эти числа в стандартном виде.

157. В 1 л морской воды в среднем содержится 0,00001 мг золота. Сколько золота содержится в 1 км^3 морской воды?

158. Не производя вычислений, расположить числа:
1) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; $(-1{,}8)^2$; $\left(\frac{3}{7}\right)^3$ в порядке убывания;
2) $(-0{,}4)^3$; $(-1{,}5)^2$; $\left(\frac{1}{7}\right)^3$; $(-7)^3$ в порядке возрастания.

159*. Какой цифрой оканчивается значение выражения:
1) $3^3+4^3+5^3$; 2) $3^{13}+10^{13}+18^{13}$;
3) $21^4+34^4+46^4$; 4) $15^5+26^5+39^5$?

§ 10. СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Возведение в степень обладает несколькими важными свойствами.

Свойство 1.

$$\boxed{a^m\cdot a^n=a^{m+n}}.$$

(!) ***При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются.***

○ По определению степени с натуральным показателем

$2^2\cdot2^3=\underbrace{(2\cdot2)}_{2\text{ раза}}\cdot\underbrace{(2\cdot2\cdot2)}_{3\text{ раза}}=$ | $a^m\cdot a^n=\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{m\text{ раз}}\times\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{ раз}}=$

по сочетательному закону умножения

$=\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{5\text{ раз}}=$ | $=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{(m+n)\text{ раз}}=$

по определению степени с натуральным показателем

$=2^5$. | $=a^{m+n}$.

Итак,

$2^2\cdot2^3=2^{2+3}$. | $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$. ●

Свойство 2.

$$\boxed{a^m:a^n=a^{m-n},\ m>n,\ a\neq0}.$$

(!) ***При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней вычитаются.***

○ По условию

$5>3$. | $m>n,\ a\neq0$.

По первому свойству степени

$2^{5-3}\cdot2^3=2^5$, | $a^{m-n}\cdot a^n=a^m$,

по определению деления

$2^{5-3}=2^5:2^3$. | $a^{m-n}=a^m:a^n$.

Итак,

$2^5:2^3=2^{5-3}$. | $a^m:a^n=a^{m-n},\ m>n,\ a\neq0$. ●

Свойство 3.

$$\boxed{(a^m)^n=a^{mn}}.$$

(!) ***При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются.***

○ По определению степени с натуральным показателем

$(2^3)^2=2^3\cdot2^3=$ | $(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}_{n\text{ раз}}=$

по первому свойству степени

$=2^{3+3}=$ | $=a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\text{ раз}}}=$

по определению умножения

$=2^{3\cdot2}$. | $=a^{mn}$.

Итак,

$(2^3)^2=2^{3\cdot2}$. | $(a^m)^n=a^{mn}$. ●

Свойство 4.

$$\boxed{(ab)^n=a^nb^n}.$$

(!) ***При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель.***

○ По определению степени с натуральным показателем

$(2\cdot3)^3=\underbrace{(2\cdot3)(2\cdot3)(2\cdot3)}_{3\text{ раза}}=$ | $(ab)^n=\underbrace{(ab)(ab)\ldots(ab)}_{n\text{ раз}}=$

по сочетательному и переместительному законам умножения

$=\underbrace{(2\cdot2\cdot2)}_{3\text{ раза}}\underbrace{(3\cdot3\cdot3)}_{3\text{ раза}}=$ | $=\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{ раз}}\underbrace{(b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)}_{n\text{ раз}}=$

по определению степени с натуральным показателем

$=2^3\cdot3^3$. | $a^n\cdot b^n$.

Итак,

$(2\cdot3)^3=2^3\cdot3^3$. | $(ab)^n=a^nb^n$. ●

Свойство 5.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},\ b\neq 0}.$$

(!) ***При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель.***

○ По определению степени с натуральным показателем

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}_{3\text{ раза}}= \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ раз}}=$$

по правилу умножения дробей

$$=\frac{\overbrace{2\cdot2\cdot2}^{3\text{ раза}}}{\underbrace{3\cdot3\cdot3}_{3\text{ раза}}}= \qquad =\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ раз}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ раз}}}=$$

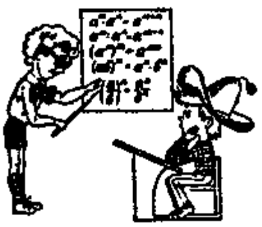
по определению степени с натуральным показателем

$$=\frac{2^3}{3^3}. \qquad =\frac{a^n}{b^n}.$$

Итак,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}. \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},\ b\neq 0. \ ●$$

Задача 1. Вычислить: $\frac{13^7\cdot5^3\cdot3^4}{13^6\cdot5\cdot3^4}$.



$$\triangle\ \frac{13^7\cdot5^3\cdot3^4}{13^6\cdot5\cdot3^4}=\frac{13^7}{13^6}\cdot\frac{5^3}{5}\cdot\frac{3^4}{3^4}=$$
$$=13^{7-6}\cdot5^{3-1}\cdot1=13\cdot25=325. \ ▲$$

Задача 2. Скорость света равна $3\cdot10^8$ м/с, расстояние от Солнца до Земли равно $1{,}5\cdot10^{11}$ м. За какое время пройдет луч света расстояние от Солнца до Земли?

△ По формуле пути при равномерном движении $s=vt$ получаем:

$$1{,}5\cdot10^{11}=3\cdot10^8t,$$

откуда

$$t=\frac{1{,}5\cdot10^{11}}{3\cdot10^8}=0{,}5\cdot10^3=500.$$

Ответ. 500 с = 8 мин 20 с. ▲

Упражнения

Записать произведение в виде степени (160—162).

160. 1) c^3c^2; 2) a^3a^4; 3) $\left(\frac{1}{2}a\right)^7\left(\frac{1}{2}a\right)$; 4) $(3b)(3b)^6$.

161. 1) $2^32^22^4$; 2) $3^23^53^3$; 3) $(-5)^6(-5)^3(-5)^4$; 4) $(-6)^3(-6)^2(-6)^7$.

162. 1) $(-2{,}5a)^3(-2{,}5a)^9$; 2) $\left(-\frac{5x}{6}\right)^5\left(-\frac{5x}{6}\right)^7$; 3) $(x-a)^7(x-a)^{10}$; 4) $(n+m)^{16}(n+m)^5$.

Записать в виде степени с основанием 2 (163—164).

163. 1) 32; 2) 128; 3) 1024; 4) 256; 5) $2^5\cdot128$; 6) $32\cdot64$.

164. 1) $64:4$; 2) $32:2^3$; 3) $8:2^2$; 4) $256:32$; 5) $\frac{2^7}{2^5}$; 6) $\frac{2^{10}}{2}$.

Записать в виде степени с основанием 3 (165—166).

165. 1) 81; 2) 27; 3) 729; 4) 243; 5) $3^6\cdot81$; 6) $243\cdot27$.

166. 1) $3^4:9$; 2) $27:3^2$; 3) $243:27$; 4) $81:9$; 5) $\frac{3^{16}}{3}$; 6) $\frac{3^8}{3^6}$.

Записать частное в виде степени (167—168).

167. 1) $\left(-\frac{9}{7}\right)^8:\left(-\frac{9}{7}\right)^5$; 2) $\left(\frac{1}{17}\right)^{18}:\left(\frac{1}{17}\right)^{17}$; 3) $x^{21}:x^7$; 4) $d^{24}:d^{12}$.

168. 1) $\left(\frac{3y}{4}\right)^6:\left(\frac{3y}{4}\right)^2$;
2) $(2a)^5:(2a)^3$;
3) $(a-b)^7:(a-b)^5$;
4) $(m+n)^{10}:(m+n)^5$.

Вычислить (169—170).

169. 1) $\frac{2\cdot3^3}{3^2}$; 2) $\frac{2^3\cdot3^2}{2^2\cdot3}$; 3) $\frac{3^5\cdot3^{10}}{3^8\cdot3^7}$; 4) $\frac{5^9\cdot5^7}{5^4\cdot5^8}$.

170. 1) $\frac{8\cdot3^3}{2\cdot3^2}$; 2) $\frac{11^3\cdot4^2}{11^2\cdot4}$; 3) $\frac{2^4\cdot2^6\cdot2^3}{2^5\cdot2^7}$; 4) $\frac{3^6\cdot3^4}{3^5\cdot3\cdot3}$.

171. Решить уравнение:
1) $x:3^2=3^3$; 2) $x:2^4=2^2$; 3) $x\cdot2^6=2^8$,
4) $x\cdot3^5=3^8$; 5) $5^5x=5^7$; 6) $4^5x=4^8$.

Записать в виде степени с основанием a (172—173).

172. 1) $(a^3)^6$; 2) $(a^8)^7$; 3) $(a^2)^5a^3$;
4) $a^5(a^2)^3$; 5) $a^7a^3(a^2)^4$; 6) $a^3(a^3)^3a^3$.

173. 1) $(a^7)^3:(a^3)^4$; 2) $(a^6)^4:(a^3)^5$; 3) $\frac{(a^3)^3a^4}{a^{12}}$; 4) $\frac{a^3(a^4)^4}{(a^3)^4}$.

174. Найти значение выражения:
1) $\frac{(c^2)^3c^4}{(c^3)^4}$ при $c=-3$; $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{d^4d^5}{(d^2)^3}$ при $d=\frac{1}{4}$; -10.

175. Представить 2^{20} в виде степени с основанием:
1) 2^2; 2) 2^4; 3) 2^5; 4) 2^{10}.

Записать в виде степени с показателем 2 (176—177).

176. 1) 0,01; 2) $\frac{25}{36}$; 3) $1\frac{9}{16}$; 4) 0,0004.

177. 1) a^4; 2) b^6; 3) c^{10}; 4) x^{20}.

Возвести в степень произведение (178—181).

178. 1) $(3\cdot5)^4$; 2) $(7\cdot6)^5$; 3) $(1{,}3\cdot8)^5$; 4) $\left(4\cdot\frac{1}{7}\right)^3$.

179. 1) $(ax)^7$; 2) $(6y)^6$; 3) $(2{,}5cd)^2$; 4) $(3nm)^3$.

180. 1) $(xy^3)^2$; 2) $(a^2b)^3$; 3) $(2b^4)^5$; 4) $(0{,}1c^3)^2$.

181. 1) $(10n^2m^3)^4$; 2) $(8a^4b^7)^3$; 3) $(-2{,}3a^3b^4)^7$; 4) $(-2nm^3)^4$

182. (Устно.) Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если длину каждой его стороны увеличить в 2 раза; в 3 раза; в 10 раз?

183. (Устно.) Какую часть объема куба составляет куб, ребро которого составляет $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$ часть ребра первого куба?

184. Записать в виде степени произведения выражение:
1) $4^5\cdot x^5$; 2) $2^3\cdot a^3$; 3) $5^4\cdot7^4$; 4) $2^5\cdot3^5$;
5) $16a^2$; 6) $81k^2$; 7) $9^7n^7m^7$; 8) $15^3a^3b^3$.

Записать выражение в виде степени с показателем 2 (185—186).

185. 1) c^2d^{10}; 2) a^4b^6; 3) $25a^4$; 4) $81m^2$.

186. 1) $a^4b^6c^2$; 2) $x^2y^4z^8$; 3) $49x^8y^6$; 4) $100c^4x^6$.

Вычислить (187—189).

187. 1) $(0{,}25)^7\cdot4^7$; 2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{17}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{17}$;
3) $(-0{,}125)^{11}\cdot8^{11}$; 4) $(-0{,}2)^5\cdot5^5$.

188. 1) $\frac{2^6\cdot3^6}{6^6}$; 2) $\frac{4^5\cdot3^5}{12^5}$; 3) $\frac{10^5}{2^5\cdot5^3}$; 4) $\frac{14^4}{2^3\cdot7^3}$.

189. 1) $\frac{81\cdot27^3}{3^8}$; 2) $\frac{2^8\cdot(7^2)^4}{14^7}$; 3) $\frac{16^3\cdot3^8}{12^4}$; 4) $\frac{2^6\cdot(2^3)^5}{(2^6)^3}$.

Возвести в степень дробь (190—192).

190. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{5}{7}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{3}{a}\right)^2$; 4) $\left(\frac{b}{8}\right)^3$.

191. 1) $\left(\frac{a}{2b}\right)^4$; 2) $\left(\frac{3b}{5c}\right)^4$; 3) $\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^7$; 4) $\left(\frac{5^2}{7^n}\right)^3$.

192. 1) $\left(\frac{a+b}{3}\right)^3$; 2) $\left(\frac{7}{2+c}\right)^2$; 3) $\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^5$; 4) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^7$.

Записать в виде степени (193—194).

193. 1) $\frac{3^7}{4^7}$; 2) $\frac{2^5}{b^5}$; 3) $\frac{m^3}{2^3}$; 4) $\frac{5^7}{a^7}$.

194. 1) $\frac{(2a)^2}{(3b)^2}$; 2) $\frac{(4x)^4}{(3y)^4}$; 3) $\frac{1}{-8}$; 4) $\frac{-1}{27}$.

Пусть n, m, k — натуральные числа. Представить выражение в виде степени (195—198).

195. 1) $4^n\cdot4^5$; 2) $3^8\cdot3^n$; 3) $c^{20}\cdot c^n$; 4) $a^n\cdot a^{13}$.

196. 1) $y^n\cdot y^m$; 2) $b^n\cdot b^k$; 3) $5^{4k}\cdot5^4$; 4) $3^{3n}\cdot3^{3m}$.

197. 1) $2^{2n}:2^n$; 2) $2^{3n}:2^{2n}$; 3) $2^{4n+1}:2^{2n}$; 4) $2^{4n+3}:2^{n+2}$.

198. 1) $3^{4n}:3^{3n}$; 2) $3^{5n}:3^{2n}$; 3) $3^{n+3}:3^{n+1}$; 4) $3^{n+6}:3^{n+2}$.

199. При каком значении n верно равенство:
1) $3^n=9$; 2) $128=2^n$; 3) $(2^2)^n=16$; 4) $(3^n)^2=81$?

Вычислить (200—201).

200. 1) $\frac{6^{13}\cdot4^{12}}{3^{13}\cdot8^{17}}$; 2) $\frac{4^{10}\cdot3^{10}}{2^{18}\cdot6^{10}}$; 3) $\frac{15^4}{3^4\cdot5^3\cdot25}$; 4) $\frac{4^{16}}{8^{10}}$.

201. 1) $\left(\frac{35}{48}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^3 \cdot \left(1\frac{3}{5}\right)^2$; 2) $\left(\frac{14}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot (2,5)^3$;

3) $\left(\frac{5^6}{6^7}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7$; 4) $\left(\frac{7^4}{15^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^5$.

202. Найти шестую степень числа, если:

1) его квадрат равен 0,25; 400; $11\frac{1}{9}$;

2) его куб равен 0,008; 125; $3\frac{3}{8}$; $37\frac{1}{27}$.

203. 1) Масса Земли равна $6 \cdot 10^{24}$ кг; масса Солнца — $2 \cdot 10^{30}$ кг. Во сколько раз масса Земли меньше массы Солнца?
2) Расстояние от Земли до звезды Сириус 83 000 000 000 000 км. Вычислить приближенно, сколько лет луч света идет от Земли до Сириуса.

204. Вычислить с помощью микрокалькулятора:
1) 8^{10}; 2) 5^9; 3) $(2,3)^4$; 4) $(1,3)^5$.

205*. Какое из чисел больше:
1) 54^4 или 21^{12}; 2) 10^{20} или 20^{10};
3) 100^{20} или 9000^{10}; 4) 6^{20} или 3^{40}?

206*. Вычислить:

1) $\frac{2 \cdot 5^{22} - 9 \cdot 5^{21}}{25^{10}}$; 2) $\frac{5 \cdot 2^{32} - 4 \cdot 2^{30}}{4^{16}}$;

3) $\frac{(4 \cdot 3^{22} + 7 \cdot 3^{21}) \cdot 57}{(19 \cdot 27^4)^3}$; 4) $\frac{5(3 \cdot 7^{15} - 19 \cdot 7^{14})}{7^{16} + 3 \cdot 7^{15}}$.

§ 11. ОДНОЧЛЕН. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ОДНОЧЛЕНА

При решении различных задач часто встречаются алгебраические выражения вида ab, $\frac{1}{2}xyz$, $3a^2b$. Например, вместимость рефрижератора, размеры которого указаны на рисунке 3, равна $3abc$.

Выражение $3abc$ является произведением четырех множителей, из которых первый множитель обозначен цифрой, а три следующих — буквами a, b, c.

Рис. 3

Множители, записанные с помощью цифр, называются *числовыми множителями*, а множители, обозначенные буквами,— *буквенными множителями*. Произведение числовых и буквенных множителей называют *одночленом*.

Например, одночленами являются выражения

$$abc, \quad (-4)\,a3ab, \quad \frac{1}{4}a\,(-0,3)\,bab.$$

Так как произведение равных множителей можно записать в виде степени с натуральным показателем, то *степень числа и произведение степеней чисел также называют одночленами.*

Например, одночленами являются выражения

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2, \quad (-7), \quad x^5, \quad 4a^2, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)a^2b.$$

Так как каждое число можно записать в виде произведения этого числа на единицу, то выражения вида a, 2, $\frac{3}{8}$ также считают одночленами.

Задача. Найти значение одночлена

$$16ac\,(0,5)\,a\,(0,25)\,b$$

при $a=\frac{1}{3}$, $b=34$, $c=\frac{9}{17}$.

△ Если подставить данные значения букв в одночлен, то придется вычислить произведение

$$16 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{17} \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,25 \cdot 34.$$

Вычисления можно провести короче, если сначала упростить данный одночлен, используя переместительный и сочетательный законы умножения:

$$16ac\,(0,5)\,a\,(0,25)\,b = (16 \cdot 0,5 \cdot 0,25)\,(a \cdot a)\,bc = 2a^2bc.$$

Теперь находим значение одночлена $2a^2bc$ при $a=\frac{1}{3}$, $b=34$, $c=\frac{9}{17}$:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 34 \cdot \frac{9}{17} = \frac{2 \cdot 34 \cdot 9}{9 \cdot 17} = 4. \ ▲$$

При решении задачи данный одночлен был записан в более простом виде: $2a^2bc$. В этом одночлене содержатся только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями. Такие одночлены называют ***одночленами стандартного вида.***

Любой одночлен можно записать в стандартном виде. Для этого нужно перемножить все числовые множители и поставить их произведение на первое место. Затем произведение степеней с одинаковым основанием записать в виде степени. Буквенные множители чаще всего располагают в алфавитном порядке, хотя это необязательно.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют *коэффициентом этого одночлена.*

Например, коэффициент одночлена $2a$ равен 2, коэффициент одночлена $\frac{5}{6}ab^2$ равен $\frac{5}{6}$, коэффициент одночлена $(-7)a^2b^3c$ равен (-7). В последнем случае одночлен можно записать без скобок: $(-7)a^2b^3c=-7a^2b^3c$.

Коэффициент, равный 1, обычно не записывают, так как от умножения на единицу число не меняется. Например, $1\cdot abc^2=abc^2$, т. е. коэффициент одночлена abc^2 равен единице.

Если коэффициент равен (-1), то и в этом случае единицу и скобки можно не писать, а оставить только знак «—». Например, $(-1)abc=-abc$, т. е. коэффициент одночлена $-abc$ равен -1.

Упражнения

207. Вместо словесной формулировки записать алгебраическое выражение:
1) произведение куба числа m и числа p;
2) утроенное произведение квадрата числа a и числа b;
3) число секунд в t часах;
4) число сантиметров в n метрах.

208. Найти числовое значение одночлена:
1) $0,5b^2$ при $b=-4$; 2) $3abc$ при $a=2$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$.

209. Среди одночленов $10,2a^2b^2c$; $-7,3ab^2c$; $17a^2bca$; $-2,6ab^2c^2$; $-m$; $3ab$; $-28a^2b^2c^2$; $3aabc$; $-2a\cdot\frac{1}{2}b$; $-m^4m$; $m\cdot 2$; $17a^2b^2c^2$ указать одночлены:
1) стандартного вида;
2) отличающиеся только коэффициентами.

210. Записать одночлен в стандартном виде:
1) $3m^4m$; 2) z^5z^5z; 3) $-ab0,5$;
4) $(-m)(-m^3)$; 5) $5^2pq^3(-4)^2qp$; 6) $2^3qp^2(-3)^2pq$;
7) $-2,5m(-0,8)m^3n^4$; 8) $\frac{2}{3}xy^2\left(-\frac{2}{11}\right)xy$.

211. Записать одночлен в стандартном виде и найти его числовое значение:
1) $ac12c$ при $a=-\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{6}$;
2) $\frac{1}{6}a8b^2\frac{3}{4}ba^3$ при $a=-2$, $b=\frac{1}{2}$.

212*. Длина окружности радиуса R выражается формулой $C=2\pi R$; площадь круга радиуса R выражается формулой $S=\pi R^2$ ($\pi\approx 3,14$). С помощью микрокалькулятора вычислить:
1) C при $R=37,5$; 2) S при $R=1,3$;
3) R при $C=122,46$; 4) S при $C=16,4$.

§ 12. УМНОЖЕНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ

Задача. Объем прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле $V=abc$, где a — длина, b — ширина и c — высота этого параллелепипеда. Каким будет объем нового параллелепипеда, если длину данного увеличить в 5 раз, ширину — в $2n$ раз, высоту — в $3n$ раз?

△ Найдем измерения нового параллелепипеда: длина $5a$, ширина $2nb$, высота $3nc$. Его объем равен

$$V_1=(5a)\cdot(2nb)\cdot(3nc). ▲$$

Выражение $(5a)\cdot(2nb)\cdot(3nc)$ является произведением трех одночленов: $5a$, $2nb$, $3nc$.

По свойствам умножения чисел можно написать равенство:

$$(5a)\cdot(2nb)\cdot(3nc)=5a2nb3nc=(5\cdot2\cdot3)\cdot(annbc)=30n^2abc.$$

В результате умножения одночленов снова получается одночлен. Его нужно упростить, записав в стандартном виде. Например:

$$(3a^2b^3c)\cdot(4ab^2)=3a^2b^3c4ab^2=12a^3b^5c.$$

Рассмотрим произведение двух или нескольких одинаковых одночленов, т. е. степень одночлена, например $(5a^3b^2c)^2$. Так как этот одночлен является произведением множителей 5, a^3, b^2, c, то по свойству возведения произведения в степень имеем:

$$(5a^3b^2c)^2=5^2(a^3)^2(b^2)^2c^2=25a^6b^4c^2.$$

Точно так же

$$(2pq^2)^3=2^3p^3(q^2)^3=8p^3q^6.$$

В результате возведения одночлена в натуральную степень снова получается одночлен.

Упражнения

Выполнить умножение одночленов (213—215).

213. 1) $(2p)(-3c^2)$; 2) $(-5m^2)(-7n)$;
3) $(4a^2)(6a^3)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}b^3\right)(8b^2)$.

214. 1) $(3a^2b^5c)(6a^3bc^2)$; 2) $(7a^3b^2c)(-3ab^4c)$;
3) $\left(\frac{2}{3}a^2b^3x\right)\left(\frac{3}{4}a^3bx^2\right)$; 4) $\left(-\frac{3}{2}a^2xy^3\right)\left(\frac{3}{4}ax^2y\right)$.

215. 1) $\left(-\frac{1}{3}m^2\right)(-24n)(4nm)$;
2) $(-18n)\left(-\frac{1}{6}m^2\right)(-5nm)$;
3) $\left(\frac{1}{3}ay^3\right)\left(\frac{3}{4}x^2y\right)(0{,}2a^3x)$;
4) $(-13a^2bc)(-5ab^2c)(-0{,}4abc^3)$.

Возвести одночлен в степень (216—218).

216. 1) $(2a)^3$; 2) $(5b)^2$; 3) $(3b^2)^4$; 4) $(2a^3)^2$.

217. 1) $(-2a^2b)^3$; 2) $(-a^2bc)^5$; 3) $(-3x^3y)^2$; 4) $(-2x^2y^3)^4$.

218. 1) $\left(\frac{1}{2}nm^2\right)^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}n^2m^2\right)^4$;
3) $(-0{,}1a^2b^3)^5$; 4) $(0{,}4a^3b^2)^2$.

Выполнить действия (219—220).

219. 1) $(-2a)^2(-3a)$; 2) $(-a)^3(2a)$;
3) $(-0{,}2bc^3)^2(20cx^2)$; 4) $(-0{,}1ab^2c)^3(100by^2)$.

220. 1) $\left(-1\frac{3}{5}x^2y^2\right)\left(-\frac{1}{2}c^2x^2\right)^3$; 2) $\left(2\frac{1}{4}x^3y\right)\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2$;
3) $(-3bc^2)^3(2ab^2)^2$; 4) $(-2a^2b)^3(-a^2b^3)^3$.

221. Выполнить умножение одночленов и найти значение полученного выражения:
1) $\frac{1}{3}a^2\cdot3a^2b$ при $a=-2$, $b=\frac{5}{7}$;
2) $\frac{2}{5}mn\cdot10n^2$ при $m=0{,}8$, $n=4$.

---

222. Найти площадь прямоугольника со сторонами:
1) $\frac{1}{5}a$ и $10b$; 2) $\frac{3}{7}x$ и $14y$.

223. Найти объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами:
1) $0{,}25m$, $1\frac{1}{3}n$ и $6mn$; 2) $0{,}1a$, $2b^2$ и $5ab$.

224. Записать одночлен в виде квадрата другого одночлена:
1) $9a^2$; 2) $16x^4$; 3) $25a^2b^4$;
4) $81x^4y^2$; 5) $36x^{10}y^4$; 6) $1{,}21a^4b^4$.

225. Записать одночлен в виде куба другого одночлена:

1) $27a^3$; 2) $8b^6$; 3) $27a^3b^{12}$;

4) $8a^9b^6$; 5) $\frac{1}{125}x^9y^{12}$; 6) $-0{,}027x^3y^{15}$.

226*. При каком значении n верно равенство:

1) $(2a)^n=32a^5$; 2) $\left(-\frac{1}{3}x^2y\right)^n=-\frac{1}{27}x^6y^3$;

3) $(0{,}2y^2)^n\cdot 100=4y^4$; 4) $\left(3\frac{1}{3}m^4\right)^n\cdot 0{,}001=\frac{1}{27}m^{12}$?

§ 13. МНОГОЧЛЕНЫ

В алгебре часто рассматриваются алгебраические выражения, представляющие собой сумму или разность одночленов.

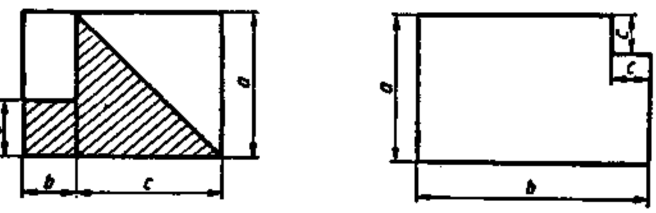
Например, площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на рисунке 4,*а*, равна $\frac{1}{2}ac+b^2$, а площадь фигуры, изображенной на рисунке 4,*б*, равна $ab-c^2$. Выражение $\frac{1}{2}ac+b^2$ — сумма двух одночленов $\frac{1}{2}ac$ и b^2. Выражение $ab-c^2$ — разность двух одночленов ab и c^2 или сумма одночленов ab и $(-c^2)$. Эти выражения являются алгебраическими суммами одночленов. Такие выражения называют многочленами.

(!) ***Многочленом** называется алгебраическая сумма нескольких одночленов.*

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют *членами этого многочлена*.

Например, членами многочлена $5nm^2-3m^2k-7nk^2+4nm$ являются $5nm^2$, $-3m^2k$, $-7nk^2$, $4nm$.

Многочлен, состоящий из двух членов, называют двучленом; многочлен, состоящий из трех членов, называют трехчленом и т. д.



а) Рис. 4 б)

Примеры двучленов: a^2-b^2, $5ac+4c$.

Примеры трехчленов: $a+2b-3c$, $\frac{1}{2}-bc+3ab$.

Одночлен считают многочленом, состоящим из одного члена.

Если некоторые члены многочлена записаны не в стандартном виде, то этот многочлен можно упростить, записав все его члены в стандартном виде.

З а д а ч а. Упростить многочлен $2a4b-5abac+9bc\frac{1}{3}c$.

△ Запишем все члены данного многочлена в стандартном виде:

$$2a4b=8ab,\ -5abac=-5a^2bc,\ 9bc\frac{1}{3}c=3bc^2.$$

Следовательно,

$$2a4b-5abac+9bc\frac{1}{3}c=8ab-5a^2bc+3bc^2.\ ▲$$

У п р а ж н е н и я

227. Составить многочлен из одночленов:

1) $6x^2$, $7x$ и 9; 2) $2x^2$, $-11x$ и 3;
3) $-x^4$, x^3 и $-x$; 4) a^5, $-a^4$ и a;
5) $8a^3$, $4a^2b$, $-2ab^2$ и b^3; 6) $4a^3b$, $-2a^2b^2$, $-5ab^3$.

228. Упростить многочлен, записав каждый его член в стандартном виде:

1) $12a^2 3ba-2ab3ab^2+11aba$;
2) $2ab^2 4ab-3a^2 8aba-2abab^2$;
3) $1{,}5xy^2(-4)xyz-4mnk5m^2nk$;
4) $4cc^2c\left(-\frac{1}{4}\right)bc+5xy^2xy^2$.

229. Найти числовое значение многочлена:

1) $2a^4-ab+2b^2$ при $a=-1$, $b=-0{,}5$;
2) $x^2+2xy+y^2$ при $x=1{,}2$, $y=-1{,}2$.

230. Упростить многочлен и найти его числовое значение:

1) $-aba+a^2b2ab+4$ при $a=2$, $b=\frac{1}{2}$;
2) $b^2 5ab-5a5a^2b$ при $a=\frac{1}{5}$, $b=-2$;
3) $x^2yxy-xy^2xy+xy$ при $x=-3$, $y=2$;
4) $xy^2x^2y-xyxy$ при $x=-2$, $y=3$.

231. При каком значении x значение многочлена $-0{,}2x \cdot 3x + 7x \cdot 1\frac{3}{7} + 0{,}1x^2 \cdot 6 - 2x$ равно 1?

232. Может ли значение многочлена: 1) $2ab + 3b^2 + 1$; 2) $a^2 - b^2$ — быть числом отрицательным, если $a > 0$ и $b > 0$?

233. Может ли значение многочлена: 1) $b^2 - 4a^2$; 2) $ab - a^2 \cdot b^2$ — быть числом положительным, если $a > 0$, $b > 0$?

234. На учебно-опытном участке собрано 1410 кг фруктов, причем яблок собрано в 5 раз больше, чем груш, и на 350 кг больше, чем слив. Сколько килограммов каждого вида фруктов собрано на этом участке?

§ 14. ПРИВЕДЕНИЕ ПОДОБНЫХ ЧЛЕНОВ

Решим задачу.

Задача 1. Имеются две книги с одинаковым числом букв на каждой странице; на одной странице помещается n строк и в каждой строке m букв. В первой книге 300 страниц, во второй — 500. Сколько всего букв в двух книгах?

1-й способ. △ Число букв на каждой странице равно mn. В первой книге $300nm$ букв, во второй — $500nm$ букв, в двух книгах $300nm + 500nm$ букв. ▲

2-й способ. △ Число букв на каждой странице равно mn. Число страниц в двух книгах равно $300 + 500 = 800$. Поэтому число букв в них равно $800nm$. ▲

Разумеется, оба ответа верные, поэтому

$$300nm + 500nm = 800nm.$$

Однако при вычислениях второй ответ оказывается более удобным. Например, если $n = 40$, $m = 50$, то $nm = 2000$ и для вычисления выражения $300nm + 500nm$ нужно сделать еще три действия:

$$300 \cdot 2000 + 500 \cdot 2000 = 600\,000 + 1\,000\,000 = 1\,600\,000,$$

а для вычисления выражения $800nm$ нужно сделать всего одно действие:

$$800 \cdot 2000 = 1\,600\,000.$$

Именно поэтому важно уметь упрощать алгебраические выражения.

Двучлен $300nm + 500nm$ является суммой двух одночленов: $300nm$ и $500nm$. Эти одночлены отличаются друг от друга только коэффициентами. Такие *одночлены* называют *подобными*.

Например, одночлены abc и $-3abc$ подобны, одночлены $2pq^2$ и $5q^2p$ подобны, а одночлены a^2b и ab^2 не подобны.

Одинаковые одночлены также считают подобными.

Например, одночлены $2a^2b$ и $2a^2b$ подобны.

Задача 2. Упростить многочлен $3ab - 2bc + 4ac - ab + 3bc + 4ab$.

△ Выделим подобные одночлены. Одночлены $3ab$, $-ab$, $4ab$ подобны, подчеркнем их одной чертой. Подобные одночлены $-2bc$ и $3bc$ подчеркнем двумя чертами. Подобных одночлену $4ac$ нет, его подчеркивать не будем. Получим:

$$\underline{3ab} - \underline{\underline{2bc}} + 4ac - \underline{ab} + \underline{\underline{3bc}} + \underline{4ab}.$$

Переставим члены многочлена так, чтобы подобные члены стояли рядом, и заключим подобные члены в скобки. Получим:

$$(3ab - ab + 4ab) + (-2bc + 3bc) + 4ac.$$

Так как

$$3ab - ab + 4ab = (3 - 1 + 4)\,ab = 6ab,$$
$$-2bc + 3bc = (-2 + 3)\,bc = bc,$$

то

$$3ab - 2bc + 4ac - ab + 3bc + 4ab = 6ab + bc + 4ac. \ ▲$$

Такое упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом, называют *приведением подобных членов*.

У многочлена $6ab + bc + 4ac$ каждый член записан в стандартном виде, и среди них нет подобных. Такой вид многочлена называют *стандартным*. Многочлен $3a^2b^2 - 2a^2b + a$ также записан в стандартном виде.

Любой многочлен можно записать в стандартном виде. Для этого нужно записать каждый член многочлена в стандартном виде и привести подобные члены.

Задача 3. Привести к стандартному виду многочлен

$$6ab\frac{1}{3}ac-3aca-8a^2\frac{1}{2}b+25a^2\frac{1}{5}c+aba-a^2bc.$$

$$\triangle\ 6ab\frac{1}{3}ac-3aca-8a^2\frac{1}{2}b+25a^2\frac{1}{5}c+aba-a^2bc=$$

$$=\underline{2a^2bc}-\underline{\underline{3a^2c}}-\underline{\underline{\underline{4a^2b}}}+\underline{\underline{5a^2c}}+\underline{\underline{\underline{a^2b}}}-\underline{a^2bc}=a^2bc+2a^2c-3a^2b.\ \blacktriangle$$

Упражнения

Привести подобные члены (235—236).

235. 1) $\frac{3}{2}y^4-\frac{1}{16}y^4+\frac{1}{32}y^4-\frac{1}{4}y^4$;

2) $\frac{3}{2}a^2b-\frac{5}{8}a^2b+\frac{1}{8}a^2b-\frac{3}{16}a^2b$.

236. 1) $2m+q+q-4m$; 2) $3a+2b-b-a$;
3) $x^2+3y^2+4x^2-y^2$; 4) $5a^2-4b^2-3a^2+b^2$.

Привести многочлен к стандартному виду (237—240).

237. 1) $11x^2+4x-x^2-4x$; 2) $2y^2-3y+2y-2y^2$;
3) $0,3c^2-0,1c^2-0,5c^3$; 4) $1,2a^2+3,4a^2-0,8a^2$.

238. 1) $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}y$;

2) $\frac{1}{5}a^2+\frac{3}{4}b^2+\frac{4}{5}a^2-\frac{3}{4}b^2$;

3) $2ab+0,7b^2-5ab+1,2b^2+8ab$;

4) $5xy-3,5y^2-2xy+1,3y^2-xy$.

239. 1) $2a^2b-8b^2+5a^2b+5c^2-3b^2+4c^2$;
2) $3xy^2+4x^3-5x^2y-3x^3+4x^2y-9xy^2$.

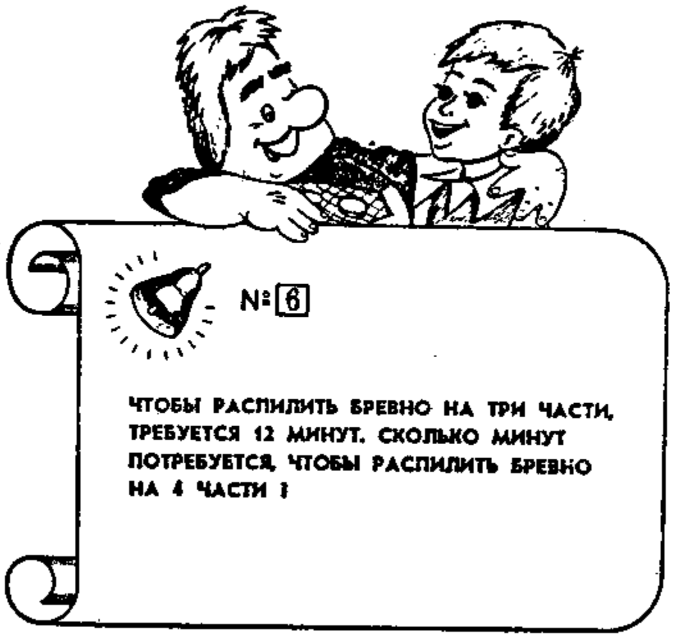
240. 1) $2m4n-3a2b-0,2n5m+b5a-5nm+8ab$;
2) $13ab-0,2xy-2a5b+6x(0,2)y+a(-3)b$;

3) $2abc5a+1\frac{5}{7}a^2\frac{7}{12}bc-2\frac{2}{3}ab\left(-\frac{3}{8}\right)a$;

4) $3nmk4n-\frac{3}{8}nm\left(2\frac{2}{3}\right)nk+\frac{2}{9}n^2m\left(-4\frac{1}{2}\right)k$.

241. Найти значение многочлена:
1) $-0,08x+73xy^2+27xy^2$ при $x=4$ и $y=0,2$;

2) $-2a^2b+4b+11a^2b$ при $a=-\frac{1}{3}$ и $b=2\frac{3}{4}$.



242. Привести многочлен к стандартному виду и выяснить, при каких значениях x его значение равно 1:
1) $2x^2-3x-x^2-5+2x-x^2+10$;
2) $0,3x^3-x^2+x-x^3+3x^2+0,7x^3-2x^2+0,07$.

243. 1) Для приготовления бронзы берется 17 частей меди, 2 части цинка и одна часть олова. Сколько нужно взять каждого металла в отдельности, чтобы получить 400 кг бронзы?

2) План земельного участка имеет форму треугольника со сторонами 5 см, 4 см и 3 см. Какой выбран масштаб на этом плане, если периметр участка равен 60 м?

3 Зак. 290

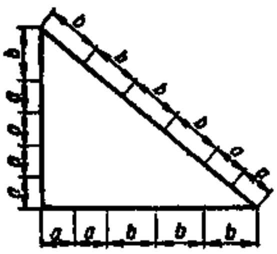


Рис. 5

§ 15. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Рассмотрим треугольник, размеры которого указаны на рисунке 5. Его периметр P равен сумме длин сторон:

$$P=(2a+3b)+(4a+b)+(2a+4b).$$

Это выражение является суммой трех многочленов: $2a+3b$, $4a+b$, $2a+4b$. Раскроем скобки:

$$P=2a+3b+4a+b+2a+4b.$$

Приведя подобные члены, получим: $P=8a+8b$.

Точно так же любую алгебраическую сумму многочленов можно преобразовать в многочлен стандартного вида. Например:

$$(2n^2-m^2)-(n^2-m^2+3q^2)=2n^2-m^2-n^2+m^2-3q^2=n^2-3q^2;$$

$$(3ab-4bc)+(bc-ab)-(ac-3bc)=$$
$$=3ab-4bc+bc-ab-ac+3bc=2ab-ac.$$

В результате сложения и вычитания нескольких многочленов снова получается многочлен.

Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены.

Иногда сумму или разность многочленов удобно находить «столбиком» (по аналогии со сложением и вычитанием чисел). При этом подобные члены располагаются друг под другом, например:

1) $$\begin{array}{r} +\,5a^2b-4bc+3ac \\ 3bc-7ac \\ \hline 5a^2b-bc\ \ -4ac \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} -\,5abc-2ab+4ac-\ \ bc \\ 3abc-3ab-\ \ ac+3bc \\ \hline 2abc+ab\ \ +5ac-4bc \end{array}$$

Упражнения

Упростить алгебраическую сумму многочленов (244—246).

244. 1) $8a+(-3b+5a)$; 2) $5x-(2x-3y)$;
3) $(6a-2b)-(5a+3b)$; 4) $(4x+2)+(-x-1)$.

245. 1) $\left(2\frac{3}{5}b-\frac{3}{4}b^2\right)+\left(\frac{1}{4}b^2-1\frac{3}{5}b\right)$;
2) $(0,1c-0,4c^2)-(0,1c-0,5c^2)$;
3) $(13x-11y+10z)-(-15x+10y-15z)$;
4) $(17a+12b-14c)-(11a-10b-14c)$.

246. 1) $(7m^2-4mn-n^2)-(2m^2-mn+n^2)$;
2) $(5a^2-11ab+8b^2)+(-2b^2-7a^2+5ab)$;
3) $(-2x^3+xy^2)+(x^2y-1)+(x^2y-xy^2+3x^3)$;
4) $(3x^2+5xy+7x^2y)-(5xy+3x^2)-(7x^2y-3x^2)$.

247. Найти сумму и разность многочленов:
1) $0,1x^2+0,02y^2$ и $0,17x^2-0,08y^2$;
2) $0,1x^2-0,02y^2$ и $-0,17x^2+0,08y^2$;
3) $a^3-0,12b^3$ и $0,39a^3-b^3$;
4) $a^3+0,12b^3$ и $-0,39a^3+b^3$.

248. Найти разность многочленов «столбиком»:
1) $3a^2+8a-4$ и $3+8a-5a^2$;
2) b^3-3b^2+4b и $b+2b^2+b^3$.

249. Упростить выражение:
1) $P+Q$, если $P=5a^2+b$, $Q=-4a^2-b$;
2) $P-Q$, если $P=2p^2-3q^2$, $Q=2p^2-4q^3$;
3) $A+B+C$, если $A=a^2-b^2+ab$, $B=2a^2+3ab-5b^2$, $C=-4a^2+2ab-3b^2$;
4) $A-B+C$, если $A=2a^2-3ab+4b^2$, $B=3a^2+4ab-b^2$, $C=a^2+2ab+3b^2$.

---

250. Решить уравнение:
1) $(7x-9)+(2x-8)=1$; 2) $(12x+5)+(7-3x)=3$;
3) $(0,2x-7)-(6-0,1x)=2$; 4) $(1-5,1x)-(1,7x+5,4)=1$.

251. Доказать, что:
1) сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на 5;
2) сумма четырех последовательных нечетных чисел делится на 8.

252. Упростить:
1) $12,5x^2+y^2-(8x^2-5y^2-(-10x^2+(5,5x^2-6y^2)))$;
2) $0,6ab^2+(2a^3+b^3-(3ab^2-(a^3+2,4ab^2-b^3)))$.

253* В двузначном числе десятков втрое больше, чем единиц. Если от этого числа отнять число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 36. Найти число.

254*. В двузначном числе десятков втрое больше, чем единиц. Если к этому числу прибавить число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 132. Найти число.

§ 16. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, размеры которого указаны на рисунке 6. Его объем равен произведению высоты и площади основания: $(a+2b+c)\cdot(3ab)$.

Это выражение является произведением многочлена $a+2b+c$ и одночлена $3ab$.

Применив распределительное свойство умножения, можно записать:

$$(a+2b+c)\cdot(3ab)=a\cdot 3ab+2b\cdot 3ab+c\cdot 3ab=$$
$$=3a^2b+6ab^2+3abc.$$

Точно так же выполняется умножение любого многочлена на одночлен, например:

$$(2n^2m-3nm^2)(-4nm)=(2n^2m)(-4nm)+(-3nm^2)(-4nm)=$$
$$=-8n^3m^2+12n^2m^3;$$
$$(3a^2-4ab+5c^2)(-5bc)=3a^2(-5bc)-4ab(-5bc)+5c^2(-5bc)=$$
$$=-15a^2bc+20ab^2c-25bc^3.$$

Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить.

В результате умножения многочлена на одночлен снова получится многочлен. Получившийся многочлен нужно упростить, записав его в стандартном виде. Промежуточный результат можно не записывать, а сразу писать ответ, выполняя умножение одночленов устно, например:

$$(-3ab+2a^2-4b^2)\left(-\frac{1}{2}ab\right)=$$
$$=\frac{3}{2}a^2b^2-a^3b+2ab^3.$$

Рис. 6

Умножение одночлена на многочлен производится по тому же правилу, так как при перестановке множителей произведение не меняется, например:

$$4pq(3p^2-q+2)=12p^3q-4pq^2+8pq.$$

Упражнения

Найти произведение многочлена и одночлена (255—257).

255. 1) $2(3a^2-4a+8)$; 2) $\left(-\frac{1}{3}\right)(m-n+p)$;
3) $(3a-5b+bc)(-3)$; 4) $(-5)(3x^3+7x^2-x)$.

256. 1) $7ab(2a+3b)$; 2) $5a^2b(15b+3)$;
3) $12p^2q(q^2p-q^2)$; 4) $3xy^2(xy-2x^3)$.

257. 1) $17a(5a+6b-3ab)$; 2) $8ab(2b-3ac+c^2)$;
3) $3x^2y(5x+6y+7z)$; 4) $xyz(x^2+2y^2+3z^2)$.

Упростить выражение (258—259).

258. 1) $6(2t-3n)-3(3t-2n)$; 2) $5(a-b)-4(2a-3b)$;
3) $-2(3x-2y)-5(2y-3x)$; 4) $7(4p+3)-6(5+7p)$.

259. 1) $(x^2-1)3x-(x^2-2)2x$; 2) $(4a^2-3b)2b-(3a^2-4b)3b$.

260. Найти значение алгебраического выражения:
1) $7(4a+3b)-6(5a+7b)$ при $a=2$, $b=-3$;
2) $a(2b+1)-b(2a-1)$ при $a=10$, $b=-5$;
3) $3ab(4a^2-b^2)+4ab(b^2-3a^2)$ при $a=10$, $b=-5$
4) $4a^2(5a-3b)-5a^2(4a+b)$ при $a=-2$, $b=-3$

---

261. Решить уравнение:
1) $3(x-1)-2(3-7x)=2(x-2)$;
2) $10(1-2x)=5(2x-3)-3(11x-5)$;
3) $1{,}3(x-0{,}7)-0{,}12(x+10)-5x=-9{,}75$;
4) $2{,}5(0{,}2+x)-0{,}5(x-0{,}7)-0{,}2x=0{,}5$.

262. При каком значении x значения выражений равны:
1) $\frac{1}{2}(x-7)+1$ и $\frac{3(1-x)}{4}$;
2) $\frac{2}{5}(3-2x)$ и $\frac{3(1+3x)}{10}-\frac{4}{5}$?

263*. Во второй день турист прошел путь, равный 90% того, что он прошел в первый день, и после небольшого отдыха прошел еще 2 км. В третий день он прошел путь, равный 40% того, что было пройдено за первые два дня. Какое расстояние проходил турист ежедневно, если за три дня он прошел 56 км?

§ 17. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Задача. Найти площадь поверхности стены, занятой шкафами, размеры которых указаны на рисунке 7.

△ Поверхность стены, занятая шкафами, является прямоугольником со сторонами $2a+c+2a=4a+c$ и $a+b+a=2a+b$. Площадь этого прямоугольника равна

$$S=(4a+c)(2a+b). \blacktriangle$$

Выражение $(4a+c)(2a+b)$ является произведением многочленов $4a+c$ и $2a+b$.

Применяя распределительное свойство умножения чисел, можно записать:

$$S=(4a+c)(2a+b)=4a(2a+b)+c(2a+b).$$

Далее, так как $4a(2a+b)=8a^2+4ab$ и $c(2a+b)=2ac+bc$, то

$$S=8a^2+4ab+2ac+bc.$$

Таким образом, для нахождения произведения данных многочленов пришлось перемножить каждый член многочлена $4a+c$ на каждый член многочлена $2a+b$ и результаты сложить. Точно так же перемножаются любые два многочлена, например:

$$(7n-2m)(3n-5m)=7n\cdot 3n+7n\cdot(-5m)+(-2m)\cdot 3n+$$
$$+(-2m)\cdot(-5m)=21n^2-35nm-6mn+10m^2=$$
$$=21n^2-41nm+10m^2.$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

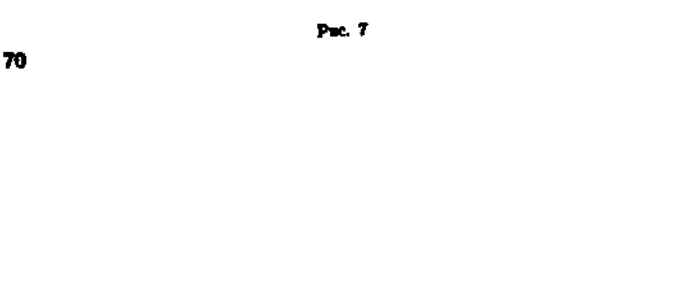


Рис. 7

В результате умножения многочлена на многочлен снова получается многочлен, который нужно записать в стандартном виде. При этом промежуточные результаты можно не писать, выполняя умножение одночленов устно, например:

$$(2a-4b+3c)(5b-c)=$$
$$=10ab-2ac-20b^2+4bc+15bc-3c^2=$$
$$=10ab-2ac-20b^2+19bc-3c^2.$$

Умножение нескольких многочленов нужно делать поочередно, например:

$$(a+b)(a+2b)(a-3b)=(a^2+3ab+2b^2)(a-3b)=$$
$$=a^3-3a^2b+3a^2b-9ab^2+2ab^2-6b^3=a^3-7ab^2-6b^3.$$

Упражнения

Выполнить умножение многочленов (264—268).

264. 1) $(a+2)(a+3)$; 2) $(z-1)(z+4)$;
3) $(m+6)(n-1)$; 4) $(b+4)(c+5)$.

265. 1) $(c-4)(d-3)$; 2) $(a-10)(-a-2)$;
3) $(x+y)(x+1)$; 4) $(-p+q)(-1-q)$.

266. 1) $(a^2+b)(a+b^2)$; 2) $(5x^2-6y^2)(6x^2-5y^2)$;
3) $(a^2+2b)(2a+b^2)$; 4) $(x^2+2x+1)(x+3)$.

267. 1) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$;
2) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$;
3) $(5x+3y)(25x^2-15xy+9y^2)$;
4) $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$.

268. 1) $(a-b)(a+b)(a-3b)$; 2) $(a+b)(a-b)(a+3b)$;
3) $(x+3)(2x-1)(3x+2)$; 4) $(x-2)(3x+1)(4x-3)$.

269. Найти значение алгебраического выражения, предварительно упростив его:

1) $(a-4)(a-2)-(a-1)(a-3)$ при $a=1\frac{3}{4}$;

2) $(m-5)(m-1)-(m+2)(m-3)$ при $m=-2\frac{3}{5}$;

3) $(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)$ при $x=-0{,}4$;
4) $(a-1)(a-2)+(a-3)(a-4)$ при $a=0{,}2$.

270. 1) Показать, что при $x=2\frac{1}{7}$ значение выражения $(5x-1)(x+3)-(x-2)(5x-4)$ равно 49.

2) Показать, что при $a=-3{,}5$ значение выражения $(a+3)(9a-8)-(2+a)(9a-1)$ равно -29.

271. Вычислить значение выражения:

1) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\right)$ при $n=-2\frac{1}{2}$;

2) $\left(n-\frac{1}{3}\right)\left(n^2+\frac{1}{3}n+\frac{1}{9}\right)$ при $n=\frac{7}{3}$.

272. Упростить выражение и выяснить, при каком значении x значение выражения равно a:

1) $(x+3)(x-3)+(4-x)x-3x$;

2) $x(1-2x)-(x-3)(x+3)+3x^2$;

3) $x^2(3-x)-(2-x^2)(x+1)-4x^2$;

4) $(x+2)(x+2)-x(5-x)-2x^2$.

273. 1) Рассматривая площадь прямоугольника $ABCD$ (рис. 8), показать, что $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$.

2) Рассматривая площадь прямоугольника $ABFE$ (рис. 9), показать, что $(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd$.

274. Доказать, что если $a(b+1)+b(a+1)=(a+1)(b+1)$, то $ab=1$.

275. Ширина прямоугольника на 15 м меньше его длины. Если ширину этого прямоугольника увеличить на 8 м, а длину уменьшить на 6 м, то его площадь увеличится на 80 м^2. Найти площадь данного прямоугольника.

276. Периметр прямоугольника 60 см. Если длину этого прямоугольника увеличить на 10 см, а ширину уменьшить на 6 см, то его площадь уменьшится на 32 см^2. Найти площадь данного прямоугольника.

277*. Доказать равенство:

1) $(n-2)(n-1)n(n+1)+1=(n^2-n-1)^2$;

2) $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$.

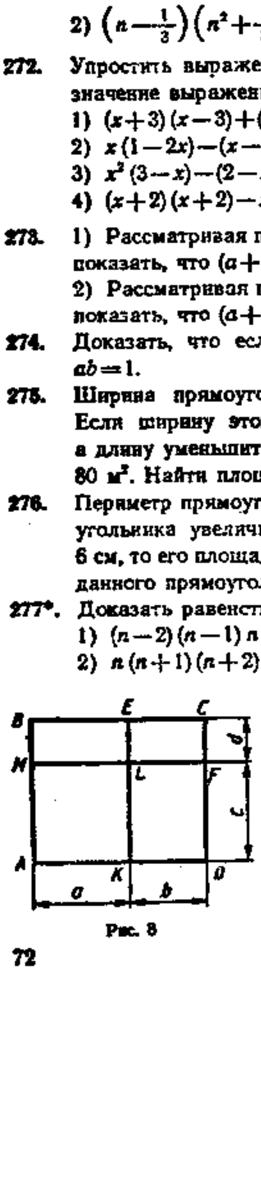


Рис. 8

Рис. 9

§ 18. ДЕЛЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА И МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

В предыдущих параграфах было показано, что в результате сложения, вычитания, умножения и возведения в натуральную степень нескольких одночленов и многочленов снова получается многочлен. В перечисленных действиях нет действия деления. Выражения, содержащие деление одночленов и многочленов, будут подробно рассмотрены в главе V. Иногда в результате такого деления также получается многочлен.

1. Деление одночлена на одночлен.

Разделим одночлен $32a^3b^2$ на одночлен $4a^2$. По свойствам умножения и деления получаем:

$$(32a^3b^2):(4a^2)=(32:4)\cdot(a^3:a^2)\cdot b^2=8ab^2.$$

Точно так же делятся одночлены и в других случаях, например:

$$4a^2b^3:(4a^2b^3)=1;$$
$$(66a^4b^2c):(22a^2b)=3a^2bc;$$
$$(9k^2n^2m^2):(-3kn^2m^2)=-3k.$$

2. Деление многочлена на одночлен.

Разделим многочлен $2a^2b+4ab^2+8abc$ на одночлен $2ab$. По свойству деления суммы на число получаем:

$$(2a^2b+4ab^2+8abc):(2ab)=(2a^2b):(2ab)+(4ab^2):(2ab)+$$
$$+(8abc):(2ab)=a+2b+4c.$$

Точно так же делится многочлен на одночлен и в других случаях, например:

$$(9a^3b^2-3a^2b^3+a^2b^2):(3a^2b^2)=$$
$$=(9a^3b^2):(3a^2b^2)+(-3a^2b^3):(3a^2b^2)+(a^2b^2):(3a^2b^2)=$$
$$=3a-b+\frac{1}{3}.$$

Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

В рассмотренных примерах деления многочлена на одночлен в результате получался многочлен. В этих случаях говорят, что многочлен делится на одночлен нацело. Однако деление многочлена на одночлен нацело не всегда возможно. Например, многочлен $ab+ac$ не делится нацело на одночлен ab.

При делении многочлена на одночлен предполагается, что буквы могут принимать такие значения, при которых делитель не равен нулю.

Упражнения

Выполнить деление (278—284).

278. 1) $b^5:b^2$; 2) $y^{11}:y^7$; 3) $a^7:a^7$; 4) $b^9:b^8$.

279. 1) $\frac{2}{5}x:(-2)$; 2) $-7m:\left(-\frac{7}{9}\right)$;
3) $-\frac{3}{4}a:\left(-\frac{8}{9}\right)$; 4) $\frac{16}{25}b:\frac{4}{5}$.

280. 1) $5a:a$; 2) $8x:x$; 3) $5a:(-a)$; 4) $(-7y):(-y)$.

281. 1) $(-6x):(2x)$; 2) $15z:(5z)$;
3) $(-6xy):(-3xy)$; 4) $12ab:(-4ab)$.

282. 1) $8abc:(-4a)$; 2) $(-10pq):(6q)$;
3) $-6{,}4xy:(-4x)$; 4) $(-0{,}24abc):(-0{,}6ab)$.

283. 1) $14a^5:(7a^2)$; 2) $(-42m^7):(-6m)$;
3) $-0{,}2a^{10}:(-a^{10})$; 4) $\left(-2\frac{1}{3}a^{17}\right):(-2a^{17})$.

284. 1) $\frac{1}{3}m^3n^2p^2:\left(-\frac{2}{3}m^2n^2p^2\right)$;
2) $\left(-1\frac{1}{2}a^4b^3c^2\right):\left(-\frac{2}{3}a^3bc^2\right)$;
3) $-1{,}7p^2q^2y^3:(28{,}9p^2y^3)$; 4) $-6a^3b^2c:(-2a^2bc)$.

285. Упростить выражение:
1) $(4a^3b^2)^3:(2a^2b)^2$; 2) $(9x^2y)^3:(3xy)^2$;
3) $(-abc^2)^5:(-a^2bc^3)^2$; 4) $(-x^2y^3z)^4:(xyz)$.

Выполнить деление (286—289).

286. 1) $(12a+6):3$; 2) $(10b-5):5$;
3) $(14m-8):(-2)$; 4) $(-6+3x):(-3)$.

287. 1) $(5mn-6np):n$; 2) $(4a^2-3ab):a$;
3) $(x-xy):x$; 4) $(cd-d):(-d)$.

288. 1) $(3a^2b-4ab^2):(5ab)$; 2) $(2c^5d^4+3c^4d^3):(-3c^4d^3)$;
3) $(-27k^4l^6+21k^3l^3):(-10k^3l^3)$; 4) $(-a^5b^3+3a^6b^2):(4a^4b^2)$.

289. 1) $(6a-8b+10):2$; 2) $(8x+12y-16):(-4)$;
3) $(10a^2-12ab+8a):2a$; 4) $(2ab+6a^2b^2-4b):(2b)$.

Упростить выражение (290—291).

290. 1) $(6a^3-3a^2):a^2+(12a^2+9a):(3a)$;
2) $(8x^3-4x^2):(2x^2)-(4x^2-3x):x$.

291. 1) $(3x^3-2x^2y):x^2-(2xy^2+x^2y):\left(\frac{1}{3}xy\right)$;
2) $(a^2b-3ab^2):\left(\frac{1}{2}ab\right)+(6b^3-5ab^2):b^2$.

Найти значение алгебраического выражения (292—293).

292. $(18a^4-27a^3):(9a^2)-10a^3:(5a)$ при $a=-8$.

293. $(3x^3+4x^2y):x^2-(10xy+15y^2):(5y)$ при $x=2$, $y=-5$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

Вычислить (294—296).

294. 1) $\frac{(-0,2)^4}{(0,1)^3}$; 2) $\frac{(0,3)^3}{(-0,1)^4}$; 3) $\frac{(3,2)^3}{(1,6)^3}$; 4) $\frac{(2,6)^3}{(1,3)^3}$.

295. 1) $\frac{2^5\cdot 2^3}{2^6}$; 2) $\frac{3^{11}\cdot 9}{3^{12}}$; 3) $\frac{3^6\cdot 3^5}{3^8}$; 4) $\frac{2^6\cdot 16}{2^9}$.

296. 1) $\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\frac{5^5}{3^3}$; 2) $\frac{7^6}{5^7}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^6$;

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^5$; 4) $\left(\frac{3}{4}\right)^6\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^8$.

297. Верно ли равенство $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$?

298. Записать в виде степени с показателем 3:

1) a^6b^3; 2) $-1000b^6$; 3) $x^{12}y^9z^6$; 4) $-0,008x^3y^9$.

299. Выполнить умножение одночленов:

1) $(-0,4x^5y^6z^2)(-1,2xyz^3)$;
2) $(-2,5n^4m^3k^2)(3nm^2k^5)$;
3) $\left(-1\frac{1}{3}x^2y^3z\right)\left(-1\frac{1}{2}xy^2z^3\right)$;
4) $\left(2\frac{1}{4}a^2b^5c^3\right)\left(-3\frac{1}{3}a^3b^2c^4\right)$.

300. Выполнить сложение и вычитание многочленов:

1) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right)-\left(\frac{5}{2}a-\frac{2}{3}b\right)+(a+b)$;
2) $(0,3a-1,2b)+(a-b)-(1,3a-0,2b)$;
3) $11p^3-2p^2-(p^3-p^2)+(-5p^2-3p^3)$;
4) $5x^2+5x^3+(x^3-x^2)-(-2x^3+4x^2)$.

301. Выполнить умножение многочлена на одночлен:

1) $\left(\frac{1}{2}a^3b^2-\frac{3}{4}ab^4\right)\frac{4}{3}a^3b$;
2) $\left(\frac{2}{3}a^2b^4+\frac{1}{2}a^3b\right)\frac{3}{2}ab^3$;
3) $\left(1\frac{4}{7}a^3x^3-2\frac{3}{4}a^2x^3-11ax^4\right)\left(-2\frac{6}{11}ax^6\right)$;
4) $\left(-2\frac{4}{9}b^6y+2\frac{1}{5}b^3y^2-11by^5\right)\left(-2\frac{1}{22}b^4y^3\right)$.

Выполнить умножение многочленов (302—303).

302. 1) $\left(\frac{1}{2}a+3b\right)\left(\frac{1}{2}a-3b\right)$; 2) $(0,3-m)(m+0,3)$;

3) $\left(\frac{1}{3}a-2b\right)\left(\frac{1}{3}a+2b\right)$; 4) $(0,2a+0,5x)(0,2a-0,5x)$.

303. 1) $(5c-4y)(-8c-2x+6y)$; 2) $(4b-c)(-5b+3c-4y)$;
3) $(4x-3y+2z)(3x-3y)$; 4) $(3a-3b+4c)(3a-5b)$.

304. Упростить выражение:

1) $5x^3:x-(2x)^2+x^4:(2x^2)$;
2) $6x^4:x-5x^5:x^2+(2x)^3$;
3) $\left(3x^4+\frac{1}{3}x^2\right):x-x^3:(3x^2)+(3x)^3$;
4) $(12x^3-8x^2):4x-4x(3x+0,25)$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Представить выражение в виде степени:

$5^3\cdot 5^2$; $3^8:3^6$; $(2^3)^4$; $3^5\cdot 2^5$.

2. Упростить выражение $(3b+c^2-d)-(c^2-2d)$.
3. Выполнить действия:

$(-0,25a^3b^2c)\cdot(5abc)$; $(7m^2-20mn-10m):10m$.

4. Упростить выражение $2m(m-1)+(m-2)(m+2)+2m$ и найти его числовое значение при $m=-0,25$.

305. Решить уравнение:

1) $(-2)^3\cdot x+(0,4)^2=(-1)^9-(1-2x)$;
2) $(1,2)^2-(0,1)^2(20-200x)=(1,4)^2$.

306. Сколько процентов от числа 500 составляет четвертая степень числа 5?

307. Четвертая степень числа 0,2 составляет 64% числа a. Найти число a.

308. Пусть n — натуральное число. Записать выражение в виде степени:

1) $a^7\cdot a^{2n}\cdot a^{3n-2}$; 2) $x^{n+2}\cdot x^8\cdot x^{4n-1}$;
3) $\frac{a^{5n-4}\cdot a^{4n+1}}{a^{3n-2}}$; 4) $\frac{3^{4n+2}\cdot 3^{2n-2}}{3^{4n-1}}$.

309. При каком значении n верно равенство:

1) $(4^4)^n = 4^{12}$; 2) $(5^n)^2 = 5^{14}$;
3) $2^{2n} = 4^5$; 4) $3(3^2)^n = 3^{11}$?

Старинные задачи (310—311).

310. — Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько,— ответил философ.— Половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть еще три женщины.

311. — Хроноса вестник, скажи, какая часть дня миновала?

— Дважды две трети того, что прошло, остается*.

312. В автобусе было n пассажиров. На первых двух остановках вышло по m человек на каждой остановке, а на третьей никто не вышел, но вошло несколько человек, после чего в автобусе стало k пассажиров. Сколько человек вошло в автобус на третьей остановке?

313. Решить уравнение:

1) $\frac{9-x}{10} = \frac{2x-3}{2}$; 2) $\frac{0{,}1-2x}{0{,}4} = \frac{2{,}5-10x}{12}$.

314. Вычислить (n — натуральное число, $n > 4$):

1) $(12 \cdot 5^{2n+1} - 8 \cdot 5^{2n} + 4 \cdot 5^{2n-1}) : (4 \cdot 5^{2n-2})$;
2) $(36 \cdot 18^n - 8 \cdot 2^{n-4} \cdot 9^n - 3^{n+1} \cdot 6^{n+1}) : 18^{n-1}$.

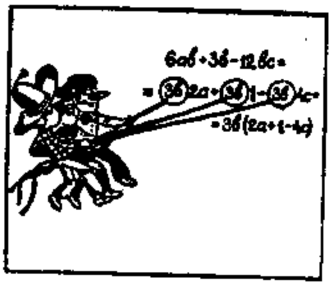
315*. Доказать, что если $2(a+1)(b+1) = (a+b)(a+b+2)$, то $a^2 + b^2 = 2$.

316*. Сумма вклада в сберегательный банк увеличивается каждый год на 2%. Доказать, что вклад в a рублей через три года будет равен $a \cdot (1{,}02)^3$.

317*. Вычислить с помощью микрокалькулятора значение выражения $a \cdot (1{,}02)^n$ при $a = 1000$ и $n = 3$; 5; 10.

* Хро́нос — бог времени в греческой мифологии. В Древней Греции день содержал 12 ч.

Глава IV
РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ



§ 10. ВЫНЕСЕНИЕ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ЗА СКОБКИ

В главе III было показано, что в результате умножения многочленов получается многочлен. Часто приходится решать обратную задачу о представлении многочлена в виде произведения нескольких одночленов и многочленов, т. е. решать задачу о *разложении многочлена на множители.*

Задача 1. Найти числовое значение выражения $ab + ac - ad$ при $a = 43$, $b = 26$, $c = 17$, $d = 23$.

△ Используя распределительное свойство умножения, данный многочлен можно представить в виде произведения одночлена и многочлена:

$$ab + ac - ad = a(b + c - d).$$

Теперь легко провести вычисления:

$$43(26 + 17 - 23) = 43 \cdot 20 = 860. \ ▲$$

Разложить многочлен $ab + ac - ad$ на множители удалось потому, что все члены этого многочлена имеют общий множитель a. Применяя распределительное свойство умножения, этот множитель можно вынести за скобки.

Приведем другие примеры вынесения общего множителя за скобки:

1) $19a - 38b = 19 \cdot a - 19 \cdot 2b = 19(a - 2b)$;
2) $3a^2b + 4bc^3 = b \cdot 3a^2 + b \cdot 4c^3 = b(3a^2 + 4c^3)$;
3) $6ab + 3b - 12bc = 3b \cdot 2a + 3b \cdot 1 - 3b \cdot 4c = 3b(2a + 1 - 4c)$.

Если все члены многочлена содержат общий множитель, то этот множитель можно вынести за скобки.

В скобках остается многочлен, полученный от деления данного многочлена на этот общий множитель.

Задача 2. Разложить на множители многочлен

$$28x^2y^4-21x^3y^2.$$

△ Если коэффициенты членов многочлена — натуральные числа, то для нахождения общего множителя следует найти наибольший общий делитель коэффициентов членов многочлена, а среди степеней с одинаковым основанием — степень с наименьшим показателем.

В многочлене $28x^2y^4-21x^3y^2$ число 7 — наибольший общий делитель чисел 28 и 21; x^2 и y^2 — степени с наименьшими показателями. Поэтому общим множителем членов многочлена является одночлен $7x^2y^2$. Вынося этот множитель за скобки, получаем:

$$28x^2y^4-21x^3y^2=7x^2y^2\cdot 4y^2-7x^2y^2\cdot 3x=7x^2y^2(4y^2-3x).$$

Здесь $4y^2$ и $3x$ получаются делением членов данного многочлена на их общий множитель $7x^2y^2$. ▲

Итак, чтобы разложить многочлен на множители вынесением общего множителя за скобки, нужно:

1) найти этот общий множитель;
2) вынести его за скобки.

Правильность разложения многочлена на множители можно проверить умножением полученных множителей.

Иногда при разложении алгебраического выражения на множители за скобки выносят многочлен. Например:

$$a(2b+3)+b(2b+3)=(2b+3)(a+b).$$

В некоторых случаях полезно применить равенство

$$(a-b)=-(b-a).$$

Например:

$$(a-3)x-(3-a)y=(a-3)x+(a-3)y=(a-3)(x+y).$$

Упражнения

318. Применить распределительный закон умножения и вычислить:

1) $14\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{4}-4\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{4}$; 2) $24\cdot 2{,}73+41\cdot 2{,}73$.

Вынести за скобки общий множитель (319—326).

319. 1) $2m+2n$; 2) $3a-3x$; 3) $8-4x$; 4) $6a+12$.

320. 1) $9a+12b+6$; 2) $21a-7b+42$; 3) $-10x+15y-75z$; 4) $9x-3y+15z$.

321. 1) $ax-ay$; 2) $cd+bc$; 3) $xy+x$; 4) $x-xy$.

322. 1) $9mn+9n$; 2) $3bd-3b$; 3) $11z-33yz$; 4) $6pk-3p$.

323. 1) a^4+2a^2; 2) a^4-3a^3; 3) $a^4b^2+ab^3$; 4) $x^2y^3-x^3y^2$.

324. 1) $9a^2b^2-12ab^3$; 2) $20x^3y^2+4x^2y$.

325. 1) $4a^3b^2+36a^2b^3+6ab^4$; 2) $2x^2y^4-2x^4y^2+6x^3y^3$.

326. 1) $ab-ac+a^2$; 2) $xy-x^2+xz$; 3) $6a^2-3a+12ba$; 4) $4b^2+8ab-12a^2b$.

327. Вычислить:

1) $137^2+137\cdot 63$; 2) $187^2-187\cdot 87$; 3) $0{,}7^3+0{,}7\cdot 9{,}51$; 4) $0{,}9^3-0{,}81\cdot 2{,}9$.

Разложить на множители (328—335).

328. 1) $a(m+n)+b(m+n)$; 2) $b(a+5)-c(a+5)$; 3) $a(b-5)-(b-5)$; 4) $(y-3)+b(y-3)$.

329. 1) $2a(a-b)+3b(a-b)$; 2) $3n(m-3)+5m(m-3)$; 3) $5a(x+y)-4b(x+y)$; 4) $7a(c-d)-2b(c-d)$.

330. 1) $a^2(x-y)+b^2(x-y)$; 2) $a^2(x+y)+b^3(x+y)$; 3) $a(x^2+y^2)-b(x^2+y^2)$; 4) $x(a^2+2b^2)+y(a^2+2b^2)$.

331. 1) $c(a-b)+b(b-a)$; 2) $a(b-c)-c(c-b)$; 3) $(x-y)+b(y-x)$; 4) $2b(x-y)-(y-x)$.

---

332. 1) $7(y-3)-a(3-y)$; 2) $6(a-2)+a(2-a)$; 3) $b^2(a-1)-c(1-a)$; 4) $a^2(m-2)+b(2-m)$.

333. 1) $a(b-c)+d(b-c)-7(c-b)$;
2) $x(x-y)+y(y-x)-3(x-y)$;
3) $x(a-2)+y(2-a)+(2-a)$;
4) $a(b-3)+(3-b)-b(3-b)$.

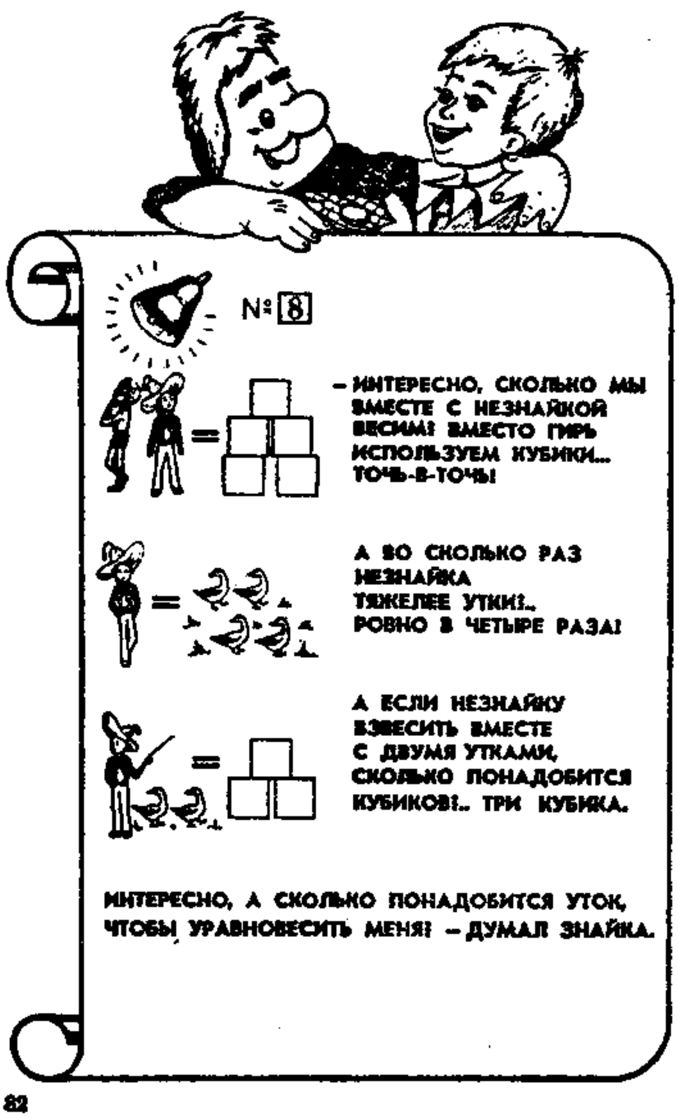
334. Найти значение выражения:

1) $7(a-5)-b(5-a)$ при $a=2$, $b=3$;
2) $a(a-b)+b(b-a)$ при $a=6{,}3$, $b=2{,}3$;
3) $2x(x+y)-3y(x+y)+7(x+y)$ при $x=4$, $y=5$;
4) $x(y-x)-y(x-y)-4(y-x)$ при $x=3$, $y=-5$.

Разложить на множители (335—336).

335. 1) $3(x+y)(x-y)-(x+y)^2$;
2) $5(a-b)^2-(a+b)(b-a)$;
3) $(x+y)^3-x(x+y)^2$;
4) $a(a-b)^2-(b-a)^3$.

336. 1) $x^2(x-3)-x(x-3)^2$; 2) $a^3(2+a)+a^2(2+a)^2$; 3) $3m(n-m)^2-9m^2(m-n)$; 4) $15p^2(p+q)-5p(p+q)^2$.



337*. Решить уравнение:

1) $x^2-2x=0$; 2) $3x+x^2=0$;
3) $5x^2+3x=0$; 4) $4x^2-7x=0$;
5) $x^2(x-2)-2x(x-2)^2=0$;
6) $3x(1-x)^2-x^2(1-x)=0$.

338*. Доказать, что если при делении натурального числа на 225 остаток равен 150, то это натуральное число делится нацело на 75.

§ 20. СПОСОБ ГРУППИРОВКИ

З а д а ч а 1. Разложить на множители многочлен

$$2a+bc+2b+ac.$$

△ Все члены многочлена не имеют общего множителя. Однако этот многочлен можно разложить на множители, если сгруппировать попарно члены многочлена так:

$$2a+bc+2b+ac=(2a+2b)+(bc+ac)=$$
$$=2(a+b)+c(b+a)=(a+b)(2+c). \ ▲$$

Выполненные преобразования основаны на применении переместительного, сочетательного и распределительного свойств сложения и умножения.

Рассмотрим другие примеры.

1) $3mx-my+3nx-ny=(3mx-my)+(3nx-ny)=$
$=m(3x-y)+n(3x-y)=(3x-y)(m+n)$.

2) $ab-ac-5b+5c=(ab-ac)-(5b-5c)=$
$=a(b-c)-5(b-c)=(b-c)(a-5)$.

Иногда группировку членов многочлена можно проводить различными способами. Например, разложение многочлена $2am+$ $+2an-3bm-3bn$ на множители можно выполнить так:

1-й способ	2-й способ
$2am+2an-3bm-3bn=$	$2am+2an-3bm-3bn=$
$=(2am+2an)-(3bm+3bn)=$	$=(2am-3bm)+(2an-3bn)=$
$=2a(m+n)-3b(m+n)=$	$=m(2a-3b)+n(2a-3b)=$
$=(m+n)(2a-3b)$.	$=(2a-3b)(m+n)$.

Рассмотрим пример разложения на множители многочлена, состоящего из шести членов:

$$ax+bx-ay-by+az+bz=(ax+bx)-(ay+by)+(az+bz)=$$
$$=x(a+b)-y(a+b)+z(a+b)=(a+b)(x-y+z).$$

Здесь члены многочлена сгруппированы по два, можно было их сгруппировать по три:

$$ax+bx-ay-by+az+bz=(ax-ay+az)+(bx-by+bz)=$$
$$=a(x-y+z)+b(x-y+z)=(x-y+z)(a+b).$$

Итак, способ группировки обычно применяют к многочленам, которые не имеют общего множителя для всех членов многочлена.

Чтобы разложить многочлен на множители способом группировки, нужно:

1) объединить члены многочлена в такие группы, которые имеют общий множитель в виде многочлена;

2) вынести этот общий множитель за скобки.

Упражнения

Разложить на множители (339—342).

339. 1) $a+b+c(a+b)$; 2) $m-n+p(m-n)$;
3) $x+3a(x+y)+y$; 4) $x+2a(x-y)-y$.

340. 1) $2m(m-n)+m-n$; 2) $4q(p-1)+p-1$;
3) $2m(m-n)+n-m$; 4) $4q(p-1)+1-p$.

341. 1) $ac+bc-2ad-2bd$; 2) $ac-3bd+ad-3bc$;
3) $2bx-3ay-6by+ax$; 4) $5ay-3bx+ax-15by$.

342. 1) $18a^2-27ab+14ac-21bc$;
2) $10x^2+10xy+5x+5y$;
3) $35ax+24xy-20ay-42x^2$;
4) $48xz^2+32xy^2-15yz^2-10y^3$.

Разложить многочлен на множители и результат проверить умножением (343—344).

343. 1) $16ab^2-5b^2c-10c^3+32ac^2$;
2) $6mnk^2+15m^2k-14n^2k-35mn^2$;
3) $-28ac+35c^2-10cx+8ax$;
4) $-24bx-15c^2+40bc+9cx$.

344. 1) $xy^2-by^2-ax+ab+y^2-a$;
2) $ax^2-ay-bx^2+cy+by-cx^2$.

345. Найти значение выражения:
1) $5a^2-5ax-7a+7x$ при $x=-3$, $a=4$;
2) $m^2-mn-3m+3n$ при $m=0{,}5$, $n=0{,}25$;
3) $a^2+ab-5a-5b$ при $a=6{,}6$, $b=0{,}4$;
4) $a^2-ab-2a+2b$ при $a=\frac{7}{20}$, $b=0{,}15$.

346. Вычислить:
1) $139\cdot15+18\cdot139+15\cdot261+18\cdot261$;
2) $125\cdot48-31\cdot82-31\cdot43+125\cdot83$;
3) $14{,}7\cdot13-2\cdot14{,}7+13\cdot5{,}3-2\cdot5{,}3$;
4) $3\frac{1}{3}\cdot4\frac{1}{5}+4{,}2\cdot\frac{2}{3}+3\frac{1}{3}\cdot2\frac{4}{5}+2{,}8\cdot\frac{2}{3}$.

347*. Решить уравнение:
1) $(x^2-4x)+x-4=0$; 2) $(x^2+7x)-4x-28=0$;
3) $5x^2-10x+(x-2)=0$; 4) $3x^2+12x-(x+4)=0$.

348*. Разделить разность многочленов x^3-3x^2 и $2x^2-6x$ на $x-2$.

Разложить многочлен на множители (349—350).

349.** 1) x^2+3x+2; 2) x^2-5x+6;
3) x^2-7x-8; 4) $x^2+9x-10$.

350.** 1) a^3+2a^2-3; 2) x^3-7x+6;
3) a^4+2a^3+1; 4) $2a^4-a^2-1$.

§ 21. ФОРМУЛА РАЗНОСТИ КВАДРАТОВ

Умножим сумму двух чисел на их разность:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2,$$

т. е.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \qquad (1)$$

или

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}. \qquad (2)$$

Разность квадратов двух чисел равна произведению разности этих чисел и их суммы.

В равенствах (1) и (2) a, b — любые числа или алгебраические выражения, например:
1) $(nm+3k)(nm-3k)=n^2m^2-9k^2$;
2) $4a^4b^2-25=(2a^2b-5)(2a^2b+5)$;
3) $(a+b)^2-16=(a+b-4)(a+b+4)$.

Формулу (1) называют *формулой сокращенного умножения*. Она применяется для упрощения вычислений, например:
1) $63\cdot57=(60+3)(60-3)=3600-9=3591$;
2) $98\cdot102=(100-2)(100+2)=100^2-2^2=10\,000-4=9996$.

Формулу (2) называют *формулой разности квадратов*. Она применяется к разложению многочленов на множители, например:

1) $a^2-9=(a-3)(a+3)$;
2) $4b^4-0{,}64c^2=(2b^2)^2-(0{,}8c)^2=(2b^2-0{,}8c)(2b^2+0{,}8c)$;
3) $(a-b)^2-1=(a-b-1)(a-b+1)$;
4) $(a+b)^2-(a-c)^2=(a+b-a+c)(a+b+a-c)=$
$=(b+c)(2a+b-c)$.

Упражнения

351. Представить в виде квадрата одночлена:
1) $4a^2$; $9b^2$; $16c^2$; $0{,}04x^2$;
2) $\frac{1}{9}a^2b^2$; $0{,}25x^2y^2$; $0{,}16m^4$; $0{,}81n^6$;
3) $0{,}01a^4b^2$; $\frac{9}{16}x^2y^4$; $\frac{25}{49}x^6z^4$; $1\frac{9}{16}m^4n^6$.

Разложить на множители (352—355).

352. 1) $25x^2-9$; 2) $4a^2-9$; 3) $64y^2-36x^2$; 4) $81a^2-16b^2$.

353. 1) $\frac{1}{9}y^2-\frac{16}{25}x^2$; 2) $\frac{4}{9}a^2-\frac{1}{16}b^2$;
3) $0{,}25a^2-0{,}49b^2$; 4) $0{,}09x^2-0{,}16y^2$.

354. 1) $36x^2y^2-1$; 2) x^2y^4-16; 3) $81a^6-49b^4$; 4) $25a^2-9b^6$.

355. 1) a^4-b^4; 2) a^4-b^8; 3) a^4-16; 4) b^4-81.

Выполнить умножение (356—358).

356. 1) $(2b+a)(2b-a)$; 2) $(c+3d)(c-3d)$;
3) $(y+6x)(6x-y)$; 4) $(3m-2n)(2n+3m)$.

357. 1) $(c^2+d^2)(c^2-d^2)$; 2) $(a^2+b^3)(a^2-b^3)$;
3) $(x^4-y^3)(y^3+x^4)$; 4) $(m^3-n^3)(m^3+n^3)$.

358. 1) $(3a^2+4b^3)(3a^2-4b^3)$; 2) $(2m^4-5n^2)(5n^2+2m^4)$;
3) $(0{,}2t^3+0{,}5p^4)(0{,}5p^4-0{,}2t^3)$;
4) $(1{,}2a^2-0{,}3b^2)(1{,}2a^2+0{,}3b^2)$.

Вычислить (359—360).

359. 1) $48\cdot 52$; 2) $68\cdot 72$; 3) $43\cdot 37$; 4) $47\cdot 53$.

360. 1) $47\cdot 33$; 2) $44\cdot 36$; 3) $84\cdot 76$; 4) $201\cdot 199$.

Разложить на множители (361—362).

361. 1) $(a+b)^2-c^2$; 2) $(m-n)^2-k^2$;
3) $(a+2b)^2-9a^2$; 4) $(3x-y)^2-4y^2$.

362. 1) $(a-b)^2-(a-c)^2$; 2) $(a+b)^2-(b+c)^2$;
3) $(2a+b)^2-(2b+a)^2$; 4) $(a+3b)^2-(3a+b)^2$.

363. Вычислить:
1) 47^2-37^2; 2) 54^2-44^2; 3) $50{,}7^2-50{,}6^2$;
4) $29{,}4^2-29{,}3^2$; 5) $\left(6\frac{2}{3}\right)^2-\left(5\frac{1}{3}\right)^2$; 6) $\left(7\frac{5}{9}\right)^2-\left(4\frac{4}{9}\right)^2$.

364. Решить уравнение:
1) $(x-1)(x+1)=x^2-2(x-3)$;
2) $3(x+5)-x^2=(2-x)(2+x)$;
3) $(2x+3)(2x+3)-4(x-1)(x+1)=49$;
4) $(3x+1)(3x+1)-(3x-2)(2+3x)=17$.

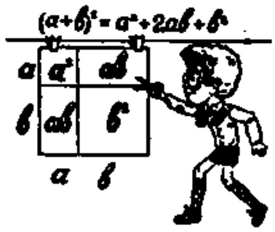
365. Выполнить умножение:
1) $(3+x)(3-x)(9+x^2)$; 2) $(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$;
3) $(x^2+1)(x+1)(x-1)$; 4) $(3a-2b)(3a+2b)(9a^2+4b^2)$.

366. Вычислить:
1) $\frac{49^2-21^2}{57^2-15^2}$; 2) $\frac{63^2-27^2}{78^2-30^2}$; 3) $\frac{40{,}7^2-40{,}6^2}{32{,}3^2-5{,}2^2}$; 4) $\frac{51{,}3^2-11{,}3^2}{113{,}9^2-73{,}9^2}$.

367*. Доказать, что модуль разности квадратов двух последовательных натуральных чисел есть нечетное число.

368*. Доказать, что при любом натуральном n число $(7n+1)^2-(2n-4)^2$ делится на 15.

369*. Разложить на множители:
1) $(a+b)^2-(a-b)^2-8b^2$;
2) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2-a^2$;
3) $(a^4+b^4)^2-(a^4-b^4)^2-a^2b^2$;
4) $9a^4-13a^2b^2+4b^4$.



§ 22. КВАДРАТ СУММЫ. КВАДРАТ РАЗНОСТИ

Рассмотрим квадрат суммы двух чисел $(a+b)^2$. Пользуясь правилом умножения многочлена на многочлен, получаем:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2,$$

т. е.

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}. \qquad (1)$$

! ***Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.***

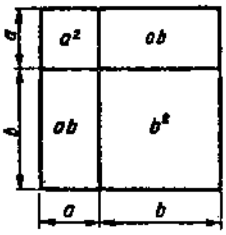


Рис. 10

Заметим, что формулу (1) можно получить, рассматривая площадь квадрата, изображенного на рисунке 10.

Рассмотрим теперь квадрат разности двух чисел:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=$$
$$=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2,$$

т. е.

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}. \quad (2)$$

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

В равенствах (1) и (2) a и b — любые числа или алгебраические выражения, например:

1) $(2m+3k)^2=(2m)^2+2\cdot 2m\cdot 3k+(3k)^2=4m^2+12mk+9k^2$;

2) $(5a^2-3)^2=(5a^2)^2-2\cdot 5a^2\cdot 3+3^2=25a^4-30a^2+9$;

3) $(-a-3b)^2=((-1)(a+3b))^2=(-1)^2(a+3b)^2=(a+3b)^2=$
$=a^2+2a\cdot 3b+(3b)^2=a^2+6ab+9b^2$.

Промежуточный результат можно не писать, производя необходимые вычисления устно. Например, можно сразу написать:

$$(5a^2-7b^2)^2=25a^4-70a^2b^2+49b^4.$$

Формулы квадрата суммы (1) и квадрата разности (2) называют также *формулами сокращенного умножения* и применяют в некоторых случаях для упрощения вычислений, например:

1) $99^2=(100-1)^2=10\,000-200+1=9801$;

2) $52^2=(50+2)^2=2500+200+4=2704$.

Формула (1) применяется также для приближенных вычислений значений выражения $(1+a)^2$. Если модуль числа a мал по сравнению с единицей (например, $a=0{,}0032$ или $a=-0{,}0021$), то число a^2 тем более мало и поэтому равенство

$$(1+a)^2=1+2a+a^2$$

можно заменить приближенным равенством $(1+a)^2\approx 1+2a$.

Например:

1) $(1{,}002)^2=(1+0{,}002)^2\approx 1+2\cdot 0{,}002=1{,}004$, т. е. $(1{,}002)^2\approx 1{,}004$;

2) $(0{,}997)^2=(1-0{,}003)^2\approx 1-2\cdot 0{,}003=0{,}994$, т. е. $(0{,}997)^2\approx 0{,}994$.

Формулы квадрата суммы и квадрата разности иногда применяются к разложению многочленов на множители, например:

1) $x^2+10x+25=x^2+2\cdot 5\cdot x+5^2=(x+5)^2$;

2) $a^4-8a^2b^3+16b^6=(a^2)^2-2\cdot a^2\cdot 4b^3+(4b^3)^2=(a^2-4b^3)^2$.

Задача. Доказать формулу

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \quad (3)$$

$\triangle$ $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. $\blacktriangle$

Аналогично доказывается формула

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) называют *формулами куба суммы и куба разности.*

Упражнения

Представить квадрат двучлена в виде многочлена (370—373).

370. 1) $(c+d)^2$; 2) $(x-y)^2$; 3) $(2+x)^2$; 4) $(x+1)^2$.

371. 1) $(q+2p)^2$; 2) $(3x+2y)^2$; 3) $(6a-4b)^2$; 4) $(5z-t)^2$.

372. 1) $(0{,}2x+0{,}3y)^2$; 2) $(0{,}4b-0{,}5c)^2$;
3) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}\right)^2$; 4) $\left(\frac{1}{4}a^3-\frac{4}{5}\right)^2$.

373. 1) $(-4ab-5a^2)^2$; 2) $(-3b^2-2ab)^2$;
3) $(0{,}2x^2+5xy)^2$; 4) $(4xy+0{,}5y^2)^2$.

Выполнить действия, используя формулы сокращенного умножения (374—375).

374. 1) $(90-1)^2$; 2) $(40+1)^2$; 3) 101^2; 4) 98^2.

375. 1) 72^2; 2) 57^2; 3) 997^2; 4) 1001^2.

376. Применяя формулу $(1+a)^2\approx 1+2a$, найти приближенное значение числа:
1) $1{,}005^2$; 2) $1{,}004^2$; 3) $1{,}012^2$; 4) $1{,}011^2$;
5) $0{,}992^2$; 6) $0{,}994^2$; 7) $0{,}988^2$; 8) $0{,}989^2$.

Заменить x одночленом так, чтобы получился квадрат двучлена (377—378).

377. 1) a^2+4a+x; 2) $p^2-0{,}5p+x$;
3) $36c^2-x+49b^2$; 4) $a^2-6ab+x$.

378. 1) m^4-3m^2+x; 2) a^2+ab+x;
3) $4c^2-5a+x$; 4) $x+6a+9a^2$.

Разложить на множители многочлен (379—383).

379. 1) $9a^2-6a+1$; 2) $1+2c+c^2$;
3) $36b^2+12b+1$; 4) $81-18x+x^2$.

380. 1) $9x^2+24x+16$; 2) $100-60a+9a^2$;
3) $36m^2+12mn+n^2$; 4) $a^2+10ab+25b^2$.

381. 1) $x^4+2x^2y+y^2$; 2) $p^4-2p^2q+q^2$;
3) $4c^4+12c^2d^3+9d^6$; 4) $25a^4+30a^2b+9b^2$.

---

382. 1) a^4-8a^2+16; 2) b^4-18b^2+81;
3) $25a^4-10a^2b+b^2$; 4) $16-8a^2b^2+a^4b^4$.

383. 1) $-a^2-2a-1$; 2) $-9+6b-b^2$;
3) $-2a^2+8ab-8b^2$; 4) $-12ab-3a^2-12b^2$.

384. Решить уравнение:
1) $16x^2-(4x-5)^2=15$;
2) $64x^2-(3-8x)^2=87$;
3) $-5x(x-3)+5(x-1)^2=-20$;
4) $(2x-3)^2-(2x+3)^2=12$.

385. Упростить выражение:
1) $(x-y)^2+(x+y)^2$; 2) $(x+y)^2-(x-y)^2$;
3) $(2a+b)^2-(2a-b)^2$; 4) $(2a+b)^2+(2a-b)^2$.

386. Доказать, что:
1) $(a-b)^2=(b-a)^2$;
2) $(-a-b)^2=(a+b)^2$;
3) $(-a-b)(a+b)=-(a+b)^2$;
4) $(a-b)^3=-(b-a)^3$;
5)* $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;
6)* $(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$.

387. Найти значение выражения:
1) $5m^2-10mn+5n^2$ при $m=142$, $n=42$;
2) $6m^2+12mn+6n^2$ при $m=56$, $n=44$;
3) $-36a^3+4a^2b-\frac{1}{9}ab^2$ при $a=4$, $b=48$;
4) $-64a^3-8a^2b-\frac{1}{4}ab^2$ при $a=-6$, $b=84$.

388. Вычислить:
1) $101^2-202\cdot81+81^2$; 2) $37^2+126\cdot37+63^2$;
3) $\frac{48^2+2\cdot48\cdot18+18^2}{48^2-18^2}$; 4) $\frac{85^2-17^2}{85^2+2\cdot85\cdot17+17^2}$.

389*. Используя формулы куба суммы или куба разности двух чисел, выполнить действие:
1) $(x+2)^3$; 2) $(3-y)^3$; 3) $(2a-b)^3$; 4) $(3b+2a)^3$.

390*. Разложить многочлен на множители:
1) $125+75a+15a^2+a^3$; 2) $m^3-12m^2+48m-64$;
3) $x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3$; 4) $c^6+3c^4d^2+3c^2d^4+d^6$.

391.** Квадрат двузначного числа содержит нечетное число десятков. Найти цифру единиц этого двузначного числа.

§ 23. ПРИМЕНЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ СПОСОБОВ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

При разложении многочленов на множители иногда используется не один, а несколько способов.

Приведем примеры:

1) $$a^3-a=a(a^2-1)=a(a-1)(a+1).$$

Здесь было использовано два способа: вынесение общего множителя за скобки и применение формулы разности квадратов.

2) $$(a^2+1)^2-4a^2=((a^2+1)-2a)((a^2+1)+2a)=$$
$$=(a^2+1-2a)(a^2+1+2a)=$$
$$=(a^2-2a+1)(a^2+2a+1)=(a-1)^2(a+1)^2.$$

Здесь сначала использовалась формула разности квадратов, затем были применены формулы квадрата суммы и разности.

3) $$4x^2-y^2+4x+2y=(4x^2-y^2)+(4x+2y)=$$
$$=(2x-y)(2x+y)+2(2x+y)=(2x+y)(2x-y+2).$$

В этом примере используется способ группировки, формула разности квадратов и вынесение общего множителя за скобки.

Эти примеры показывают, что при разложении многочленов на множители полезно соблюдать следующий порядок:

1) вынести общий множитель за скобку (если он есть);

2) попробовать разложить многочлен на множители по формулам сокращенного умножения;

3) попытаться применить способ группировки (если предыдущие способы не привели к цели).

Задача. Доказать равенство

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2). \qquad (1)$$

△ Преобразуем правую часть равенства:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3.$$

Правая часть равенства оказалась равной левой части, т. е. равенство (1) доказано. ▲

Аналогично доказывается равенство

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2). \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2) называют *формулами суммы и разности кубов*. Иногда эти формулы применяются при разложении многочленов на множители. Например:

1) $27+b^3=(3+b)(9-3b+b^2)$;

2) $x^4-8xy^3=x(x^3-8y^3)=x(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$.

Упражнения

Разложить на множители (392—396).

392. 1) $2a^2-2$; 2) $3x^2-12$; 3) $9x^3-81x$;
4) $16x-4x^3$; 5) $8-72x^2y^2$; 6) $32a^4b-2a^2b$.

393. 1) $2a^2+4ab+2b^2$; 2) $2m^2+2n^2-4mn$;
3) $5x^2+10xy+5y^2$; 4) $8p^2-16p+8$;
5) $27a^2b^2-18ab+3$; 6) $12m^5n+24m^4n+12m^3n$.

394. 1) $(x^2+1)^2-4x^2$; 2) $(x^2+2x)^2-1$;
3) $4y^2-(y-c)^2$; 4) $81-(y^2+6y)^2$.

395. 1) $(a^2+2ab+b^2)-c^2$; 2) $1-(x^2-2xy+y^2)$;
3) $1-a^2-2ab-b^2$; 4) $4-x^2-2xy-y^2$.

396. 1) a^2-b^2+a+b; 2) a^2-b^2-a-b;
3) $x-y-x^2+y^2$; 4) x^3+x^2-x-1;
5)* $m^5-m^3+m^2-1$; 6)* x^4-x^3+x-1.

Вычислить (397—398).

397. 1) $\frac{53^2-27^2}{79^2-51^2}$; 2) $\frac{38^2-17^2}{47^2-19^2}$;
3) $\frac{49^2-2\cdot 49\cdot 29+29^2}{49^2-19^2}$; 4) $\frac{47^2-3^2}{27^2+2\cdot 27\cdot 13+13^2}$.

398. 1) $19{,}7^2-8{,}3^2+28\cdot 8{,}6$;
2) $37\cdot 12{,}2+22{,}4^2-14{,}6^2$;
3) $38{,}8^2+83\cdot 15{,}4-44{,}2^2$;
4) $97\cdot 2{,}2-99{,}6^2+2{,}6^2$.

399. Доказать равенство:
1) $x^2+2x-y^2+2y=(x+y)(x-y+2)$;
2) $a^2-2b-a-4b^2=(a+2b)(a-2b-1)$.

400. Найти значение выражения:
1) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$ при $x=12{,}07$, $y=2{,}07$;
2) $a^3+a^2b-ab^2-b^3$ при $a=7{,}37$, $b=2{,}63$.

401*. Решить уравнение:
1) $25x^2-10x-x^2-25=0$; 2) $x^2+4x+4-16x^2=0$;
3) $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$; 4) $2x^4-2x^3-2x^2+2x=0$.

402. Доказать, что число 27^2-14^2 делится на 13.

403. Доказать, что при любом целом n значение выражения $(7n-2)^2-(2n-7)^2$ делится на 5; делится на 9.

404*. Используя формулы суммы или разности кубов, упростить:
1) $(a-2)(a^2+2a+4)$; 2) $(b+x)(b^2-bx+x^2)$;
3) $(2a+3)(4a^2-6a+9)$; 4) $(a^2-1)(a^4+a^2+1)$.

405*. Разложить на множители:
1) $27a^3-b^3$; 2) x^3y^3+64;
3) $8m^3+n^9$; 4) c^6-125d^3.

406*. Доказать, что если каждое из двух натуральных чисел не делится на 3, то модуль разности квадратов этих чисел делится на 3.

407*. Доказать, что модуль разности кубов двух последовательных натуральных чисел не делится на 3.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

Разложить на множители (408—411).

408. 1) $6(a+b)+(a+b)^2$; 2) $4(x-y)+3(x-y)^2$;
3) $(a-b)+(b-a)^2$; 4) $(a-b)^2-(b-a)$.

409. 1) $(c-3)^2-(c+3)(3-c)$; 2) $(a+2)^2-(a+2)(2-a)$;
3) $(-b-a)(a+b)+a^2+b^2$; 4) $(b-a)(-a-b)-3b^2$.

410. 1) $2b(x-1)-3a(x-1)+c(x-1)$;
2) $c(p-q)-a(p-q)+b(p-q)$.

411. 1) $8ax+16ay-3bx-6by$;
2) $14am-7an+8bm-4bn$;
3) $9a^2+6a+1-4b^2$;
4) $25a^2-4b^2+4b-1$.

412. Вычислить:
1) $287^2-287\cdot 48+239\cdot 713$;
2) $73{,}4^2+73{,}4\cdot 17{,}2-90{,}6\cdot 63{,}4$.

413. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\left(4c+\frac{1}{4}x\right)\left(4c-\frac{1}{4}x\right)+\left(4c-\frac{1}{4}x\right)^2$ при $c=\frac{1}{2}$, $x=2$;

2) $(0{,}1a-0{,}2b)^2+(0{,}1a-0{,}2b)(0{,}1a+0{,}2b)$ при $a=-50$, $b=-1\frac{2}{3}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Представить выражение в виде многочлена стандартного вида:

$$(a+3)^2+(a-3)(a+3)+6a.$$

2. Разложить на множители:

$$xy-2y;\ 16a^2-81;\ 3x^2-6x^3;\ x^2-10x+25;\ 3(x-1)+y(x-1);\ 2a^2-4ab+2b^2.$$

3. Разложить на множители многочлен $a^2-3ab+3a-9b$ и найти его числовое значение при $a=1$, $b=-\frac{1}{3}$.

414. Доказать, что при любых значениях x и y верно равенство:
1) $(x+y)(x^2-y^2)=(x-y)(x+y)^2$;
2) $(x-2y)(x+2y)(x^2+4y^2)=x^4-16y^4$.

415. Разложить на множители многочлен:
1) $a^2+2ab+b^2-ac-bc$;
2) $mn-kn-m^2+2mk-k^2$;
3) $x^2+2xy+y^2-z^2+2z-1$;
4) $c^2-2c+1-d^2-2de-e^2$.

416. Разложить на множители:
1) $(x^2-1)^2-(x^2+2)^2$; 2) $(5+x^2)^2-(7+x^2)^2$;
3) $(3x-1)^2-(5-2x)^2$; 4) $(7+5x)^2-(3x-2)^2$.

417. Решить уравнение:
1) $(3x-1)^2-(3x-2)^2=0$;
2) $(y-2)(y+3)-(y-2)^2=5$;
3) $(x+3)(x+7)-(x+4)^2=0$;
4) $(y+8)^2-(y+9)(y-5)=117$;
5) $(3x+4)^2-(3x-1)(1+3x)=49$;
6) $(3x+2)(3x-2)-(3x-4)^2=28$.

418. Ширина прямоугольника меньше стороны квадрата на 12 м, а длина этого прямоугольника больше стороны того же квадрата на 12 м. Сравнить площади прямоугольника и квадрата.

419. Скорость пассажирского поезда равна 60 км/ч, а товарного — 40 км/ч. Найти расстояние между двумя пунктами, если пассажирский поезд проходит это расстояние на 2 ч быстрее, чем товарный.

420. Из города в поселок выехал мотоциклист со скоростью 60 км/ч. Через полчаса навстречу ему из поселка выехал другой мотоциклист, скорость которого 50 км/ч. Сколько времени ехал второй мотоциклист до встречи с первым, если расстояние между поселком и городом равно 162 км?

421. С помощью микрокалькулятора найти значение выражения:
1) $a(3{,}478-b)-8(3{,}478-b)$ при $a=72$, $b=2{,}353$;
2) a^2b+ab^2-ab при $a=12{,}5$, $b=-4{,}4$.

422*. Записать выражение в виде многочлена:
1) $(a+(b+c))(a-(b+c))$;
2) $(a^2-(b-c))(a^2+(b-c))$.

423*. Вычислить:
1) $(2x-1)(4x^2+2x+1)-4x(2x^2-3)$ при $x=0{,}5$;
2) $x(x+2)(x-2)-(x-3)(x^2+3x+9)$ при $x=\frac{1}{4}$.

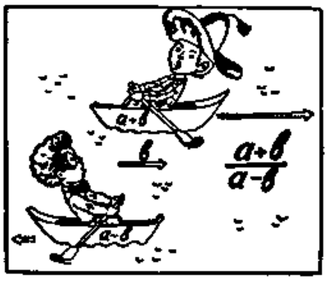
424*. Решить уравнение:
1) $(x-2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)=26$;
2) $(x-3)(x^2+3x+9)-x(x+4)(x-4)=21$;
3) $(2x-1)(4x^2+2x+1)-4x(2x^2-3)=23$;
4) $(4x+1)(16x^2-4x+1)-16x(4x^2-5)=17$.

425*. 1) Доказать, что если сумма трех последовательных натуральных чисел есть число нечетное, то их произведение делится на 24.
2) Доказать, что если сумма четырех натуральных чисел есть число нечетное, то их произведение — число четное.

426*. Верно ли равенство

$$2b^5+(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)=$$
$$=(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b)?$$

Глава V
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ



§ 24. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ДРОБЬ. СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ

Задача 1. Скорость катера в стоячей воде равна a километрам в час, скорость течения реки равна b километрам в час. Во сколько раз скорость движения катера по течению реки больше скорости движения катера против течения?

△ Скорость движения катера по течению реки равна $(a+b)$ километрам в час, скорость движения против течения равна $(a-b)$ километрам в час. Поэтому скорость движения по течению в

$$\frac{a+b}{a-b}$$

раз больше скорости движения против течения. ▲

Выражение $\frac{a+b}{a-b}$ называют *алгебраической дробью.* Числитель этой дроби $a+b$, а ее знаменатель $a-b$.

Приведем еще несколько примеров алгебраических дробей:

$$\frac{a}{b};\quad \frac{2}{x+y};\quad \frac{a-b}{c};\quad \frac{x(b+c)}{y(a-c)}.$$

В алгебраической дроби числитель и знаменатель — алгебраические выражения.

Если вместо букв, входящих в алгебраическую дробь, подставить некоторые числа, то после вычислений получится значение этой алгебраической дроби. Например, значение алгебраической дроби $\frac{a+b}{a-b}$ при $a=10$, $b=8$ равно $\frac{10+8}{10-8}=\frac{18}{2}=9$.

Условимся в дальнейшем всегда считать, что буквы, входящие в алгебраическую дробь, могут принимать лишь *допустимые значения,* т. е. такие значения, при которых знаменатель этой дроби не равен нулю.

Например, для дроби $\frac{a}{a(a-1)}$ допустимыми являются все значения a, кроме $a=0$ и $a=1$.

Так как в алгебраической дроби буквами обозначены некоторые числа, то для алгебраических дробей справедливы основное свойство дроби и правила выполнения действий.

Основное свойство дроби можно записать так:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}},$$

где $b\neq 0$, $m\neq 0$.

Это свойство означает, что при умножении или делении числителя и знаменателя дроби на одно и то же алгебраическое выражение получается равная ей дробь, например:

$$\frac{0{,}25}{0{,}75}=\frac{0{,}25\cdot 4}{0{,}75\cdot 4}=\frac{1}{3};\quad \frac{a+b}{b}=\frac{(a+b)c}{bc}.$$

Используя основное свойство дроби, можно сокращать алгебраическую дробь на общий множитель, входящий одновременно в числитель и знаменатель дроби, например:

$$\frac{a(b+c)}{a(b-c)}=\frac{b+c}{b-c},\quad \frac{(a+b)c}{(a+b)d}=\frac{c}{d}.$$

Приведем примеры дробей, для упрощения которых нужно сначала выделить общий множитель числителя и знаменателя.

Задача 2. Сократить дробь:

1) $\frac{12a^2b}{4ab^2}$; 2) $\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}$.

△ 1) Одночлены $12a^2b$ и $4ab^2$ имеют общий множитель $4ab$. Разделив числитель и знаменатель дроби на $4ab$, получим:

$$\frac{12a^2b}{4ab^2}=\frac{3a}{b}.$$

2) Разложив числитель и знаменатель данной дроби на множители, получим:

$$\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}=\frac{(m-n)(m+n)}{m(m+n)}.$$

Сокращая эту дробь на $m+n$, получим:

$$\frac{(m-n)(m+n)}{m(m+n)}=\frac{m-n}{m}\ ▲$$

Итак, для сокращения дроби нужно числитель и знаменатель разделить на их общий множитель.

Задача 3. Упростить дробь $\frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}$.

$$△\ \frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}=\frac{-3a(x-y)}{a^2(x-y)}=\frac{-3}{a}=-\frac{3}{a}.\ ▲$$

Упражнения

427. Записать алгебраическую дробь, числитель которой равен разности квадратов чисел a и b, а знаменатель — квадрату разности этих чисел.

428. Записать алгебраическую дробь, числитель которой равен сумме кубов чисел c и d, а знаменатель — удвоенному произведению этих чисел.

429. (Устно.) Найти значение алгебраической дроби:

1) $\frac{x}{4}$ при $x=2$, $x=-8$, $x=\frac{1}{2}$, $x=4{,}24$;

2) $\frac{a}{5}$ при $a=25$, $a=-125$, $a=12{,}5$, $a=0$;

3) $\frac{18}{c-5}$ при $c=8$, $c=-13$, $c=5{,}3$;

4) $\frac{3+2b}{b}$ при $b=-3$, $b=5$, $b=0{,}3$.

430. Найти допустимые значения букв, входящих в дробь:

1) $\frac{3}{a}$; 2) $\frac{-4}{b}$; 3) $\frac{a-b}{a+2}$; 4) $\frac{a+5}{3-a}$.

431. 1) Из формулы $p=2(a+b)$ найти a.
2) Из формулы $s=s_0+vt$ найти v.

432. Используя основное свойство дроби, заменить букву a алгебраическим или числовым выражением так, чтобы равенство было верным:

1) $\frac{8}{9}=\frac{a}{72}$; 2) $\frac{-3}{11}=-\frac{a}{33}$; 3) $\frac{x^2}{b}=\frac{a}{xb}$;
4) $-\frac{c}{b}=\frac{c^2}{a}$; 5) $\frac{-xy}{x^2z}=-\frac{y}{a}$; 6) $\frac{m^3n}{mn}=\frac{a}{4}$.

433. Показать, что данные две дроби равны:

1) $\frac{6}{7}$ и $\frac{18}{21}$; 2) $\frac{-3}{5}$ и $\frac{27}{-45}$; 3) $\frac{2}{3}$ и $\frac{2a}{3a}$; 4) $\frac{2a}{7b}$ и $\frac{2a^2b}{7ab^2}$.

Сократить дробь (434—437).

434. 1) $\frac{-48}{-56}$; 2) $\frac{-64}{-80}$; 3) $\frac{-121}{55}$; 4) $\frac{28}{-14}$.

435. 1) $\frac{6ab}{-4a}$; 2) $\frac{-14c}{49c}$; 3) $\frac{-a^4b}{-ab^3}$; 4) $\frac{3a^2b}{9a^3}$.

436. 1) $\frac{4(m+n)}{5(m+n)}$; 2) $\frac{7a(a-b)}{5(a-b)}$; 3) $\frac{2b(m-n)}{8b(m-n)(m+n)}$;

4) $\frac{3a(a+b)}{9a(a+b)(a-b)}$; 5) $\frac{2(a-b)}{b-a}$; 6) $\frac{5(x-y)}{15(y-x)}$.

437. 1) $\frac{3m(1-x)}{9m^2(x-1)^2}$; 2) $\frac{8a^2b(a-b)}{4a^3b(b-a)^2}$; 3) $\frac{(a-b)^2}{a-b}$; 4) $\frac{m-n}{(n-m)^2}$.

Разложить на множители числитель и знаменатель дроби и сократить ее (438—446).

438. 1) $\frac{3x+3y}{6c}$; 2) $\frac{8a}{4m-4n}$; 3) $\frac{2a+2b}{4a-4b}$;

4) $\frac{12a-3}{6a+9}$; 5) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$; 6) $\frac{a+ab}{a-ab}$.

439. 1) $\frac{a^2}{a^2+ab}$; 2) $\frac{pq^3}{p^2q-pq^2}$; 3) $\frac{7a+14b}{3a+6b}$;

4) $\frac{5k+15l}{3l+k}$; 5) $\frac{3a-6b}{12b-6a}$; 6) $\frac{2m-4n}{16n-8m}$.

440. 1) $\frac{12x^2-30xy}{30x^2-12xy}$; 2) $\frac{36a^2+24ab}{24a^2+36ab}$;

3) $\frac{m^3-3m^2n}{3m^2n-3m^3}$; 4) $\frac{a^3-2a^2b}{2a^3b^2-a^4b}$.

441. 1) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; 2) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$; 3) $\frac{4c^2-9x^2}{2c-3x}$; 4) $\frac{25-x^2}{5-x}$.

442 1) $\frac{8-3c}{9c^2-64}$; 2) $\frac{100-49b^2}{7b+10}$; 3) $\frac{2y-10}{25-y^2}$;

4) $\frac{5y-y^2}{25-y^2}$; 5) $\frac{b^2-c^2}{b^4n-c^4n}$; 6) $\frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}$.

443 1) $\frac{d^2-6d+9}{d-3}$; 2) $\frac{b+7}{b^2+14b+49}$;

3) $\frac{9-6a+a^2}{3-a}$; 4) $\frac{1-2p}{1-4p+4p^2}$.

444. 1) $\frac{1-a^2}{(a-1)^2}$; 2) $\frac{(m-n)^2}{n-m}$; 3) $\frac{4y^2-4y+1}{2-4y}$; 4) $\frac{5-2x}{4x^2-20x+25}$.

445. 1) $\frac{4y^2-4y+1}{4y^2-1}$; 2) $\frac{16a^2-1}{16a^2-8a+1}$;

3) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$; 4) $\frac{50m^2+100mn+50n^2}{15m^2-15n^2}$.

446. 1) $\frac{ax-ay+bx-by}{a+b}$; 2) $\frac{2a+2b+ax+bx}{2+x}$;

3) $\frac{2x^2-2xy-x+y}{4x^2-1}$; 4) $\frac{x^2-y^2}{3x-2x^2+3y-2xy}$.

447. Упростить:

1) $\frac{a^2b-ab^2}{a^2-ab}$; 2) $\frac{2a^2-4a}{4a-8}$; 3) $\frac{2x^3y+2xy^3}{x^2+y^2}$; 4) $\frac{x^4y^2-x^2y^4}{x^2(x+y)}$.

Упростить выражение и найти его числовое значение (448—449).

448. 1) $\frac{9c^2-16}{16-24c+9c^2}$ при $c=\frac{7}{9}$;

2) $\frac{4x^2-4xy+y^2}{y^2-4x^2}$ при $x=-0{,}2$, $y=0{,}1$.

449*. 1) $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$ при $a=0{,}2$, $b=0{,}4$;

2) $\frac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}$ при $a=4{,}49$, $b=-5{,}1$, $c=0{,}68$.

450*. Сократить дробь:

1) $\frac{|a|}{2a}$, если $a>0$; 2) $\frac{3a}{|a|}$, если $a<0$;

3) $\frac{-2a}{|a|}$, если $a<0$; 4) $\frac{|a|}{-3a}$, если $a>0$.

§ 25. ПРИВЕДЕНИЕ ДРОБЕЙ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ

Напомним, что при сложении обыкновенных дробей сначала приводят дроби к общему знаменателю. Общим знаменателем дробей является наименьшее общее кратное их знаменателей.

Так, для дробей $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{7}{10}$ общим знаменателем является число 100 — наименьшее общее кратное чисел 4, 25, 10.

Такое же преобразование приходится выполнять при сложении и вычитании алгебраических дробей, его также называют *приведением дробей к общему знаменателю.*

Задача 1. Привести алгебраические дроби $\frac{m}{3a^2b}$ и $\frac{n}{6ab^2}$ к общему знаменателю.

△ Общий знаменатель данных дробей должен делиться нацело на знаменатель каждой из дробей. Чтобы общий знаменатель делился на знаменатель первой дроби, он должен содержать множитель $3a^2b$. Далее, общий знаменатель должен делиться на знаменатель второй дроби $6ab^2$. Таким образом, общий знаменатель должен делиться на 3 и 6, т. е. на 6, на a^2 и a, т. е. на a^2, на b и b^2, т. е. на b^2. Получим общий знаменатель $6a^2b^2$, который является наименьшим общим кратным одночленов $3a^2b$ и $6ab^2$.

Разделив $6a^2b^2$ на знаменатель первой дроби $3a^2b$, получим $2b$ — дополнительный множитель, на который нужно умножить ее числитель и знаменатель. Дополнительный множитель второй дроби равен $6a^2b^2:6ab^2=a$. Умножая числитель и знаменатель каждой дроби на ее дополнительный множитель, приводим их к общему знаменателю:

$$\frac{m}{3a^2b}=\frac{2bm}{6a^2b^2}, \quad \frac{n}{6ab^2}=\frac{an}{6a^2b^2}. \ ▲$$

Задача 2. Привести к общему знаменателю дроби

$$\frac{a}{x^2-y^2}, \quad \frac{b}{2x^2-4xy+2y^2}, \quad \frac{c}{3x^2+6xy+3y^2}.$$

△ Разложим на множители знаменатели дробей:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y);$$
$$2x^2-4xy+2y^2=2(x^2-2xy+y^2)=2(x-y)^2;$$
$$3x^2+6xy+3y^2=3(x^2+2xy+y^2)=3(x+y)^2.$$

Общий знаменатель должен делиться на знаменатель каждой из данных дробей.

Так как он должен делиться на знаменатель первой дроби, то он должен содержать произведение $(x-y)(x+y)$.

Далее, общий знаменатель должен делиться на знаменатель второй дроби, и поэтому он должен содержать множитель $2(x-y)^2$. Следовательно, к знаменателю первой дроби нужно дописать множитель $2(x-y)$, т. е. общий знаменатель должен содержать произведение $2(x-y)^2(x+y)$.

Для того чтобы общий знаменатель делился на знаменатель третьей дроби $3(x+y)^2$, нужно к полученному произведению дописать множитель $3(x+y)$. Следовательно, наименьший общий знаменатель трех дробей равен

$$6(x-y)^2(x+y)^2.$$

Для приведения дробей к общему знаменателю нужно их числители и знаменатели умножить на дополнительные множители, которые находятся делением общего знаменателя на знаменатель каждой из дробей; для данных дробей они соответственно равны

$$6(x-y)(x+y), \ 3(x+y)^2, \ 2(x-y)^2.$$

Следовательно, данные дроби можно записать так:

$$\frac{a}{x^2-y^2}=\frac{6a(x-y)(x+y)}{6(x-y)^2(x+y)^2};$$

$$\frac{b}{2x^2-4xy+2y^2}=\frac{3b(x+y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2};$$

$$\frac{c}{3x^2+6xy+3y^2}=\frac{2c(x-y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2}. \ ▲$$

Таким образом, для приведения алгебраических дробей к общему знаменателю нужно:

1) найти общий знаменатель данных дробей;

2) для каждой дроби найти дополнительный множитель;

3) умножить числитель каждой дроби на ее дополнительный множитель;

4) записать каждую дробь с найденным числителем и общим знаменателем.

Упражнения

Привести дроби к общему знаменателю (451—456).

451. 1) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{14}$; 3) $\frac{1}{3a}$ и $\frac{2}{a}$; 4) $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{2b}$.

452. 1) $\frac{a}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$; 2) $\frac{3b}{4a}$ и $\frac{a^2}{2b}$; 3) $\frac{b}{a}$, $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{c}{2ab}$; 4) $\frac{b}{3a}$, $\frac{3c}{2b}$ и $\frac{c}{6ab}$.

453. 1) $\frac{1}{2p^2}$, $\frac{1}{6pk}$ и $\frac{1}{3k^2}$; 2) $\frac{1}{6b^3}$, $\frac{a^2+b^2}{9a^2b^2}$ и $\frac{3-a}{18ab^3}$;

3) $\frac{2a}{b^3}$, $\frac{4}{15a^2b}$ и $\frac{3}{20a^3b^4}$; 4) $\frac{7}{20x^4y}$, $\frac{31}{6xy^3}$ и $\frac{4}{3x^2y^4}$.

454. 1) $\frac{1}{x-y}$ и $\frac{1}{x+y}$; 2) $\frac{7a}{3x-y}$ и $\frac{6b}{3x+y}$;

3) $\frac{5}{2x-2}$ и $\frac{3}{4x-4}$; 4) $\frac{3x}{4x+4y}$ и $\frac{x}{8x+8y}$.

455. 1) $\frac{3b}{b-2}$ и $\frac{4}{b^2-4}$; 2) $\frac{7a}{x^2-9}$ и $\frac{a}{x+3}$;

3) $\frac{1}{1-a}$, $\frac{2a}{1+a}$ и $\frac{a^2}{1-a^2}$; 4) $\frac{6x}{x-y}$, $\frac{7xy}{x+y}$ и $\frac{3}{x^2-y^2}$.

456. 1) $\frac{m+n}{2m-2n}$ и $\frac{n^2+m^2}{m^2-n^2}$; 2) $\frac{a-b}{5a+5b}$ и $\frac{a^2+b}{a^2-b^2}$;

3) $\frac{7}{(x-y)^2}$ и $\frac{5}{x-y}$; 4) $\frac{5c}{(c-2)^2}$ и $\frac{6}{c-2}$.

457 Записать выражения в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

1) a и $\frac{c}{b}$; 2) $3b$ и $\frac{7}{6a}$;

3) ab, $\frac{3c}{2b}$ и $\frac{a}{4b}$; 4) ab, $\frac{3}{4ab}$ и $\frac{2}{ab^2}$;

5) $a-b$, $\frac{1}{a+b}$ и $\frac{1}{a-b}$; 6) $a+b$, $\frac{3}{ab}$ и $\frac{1}{a-b}$.

458. Привести к общему знаменателю:

1) $\frac{1}{a^2-4b^2}$, $\frac{1}{3a^2+6ab}$ и $\frac{1}{2ab-a^2}$;

2) $\frac{5}{4x-4}$, $\frac{4x}{1-x^2}$ и $\frac{1}{3x^2+3x}$;

3) $\frac{5x}{x^2-4}$, $\frac{3x+y}{x^2+4x+4}$ и $\frac{y-x}{x^2-4x+4}$;

4) $\frac{3a}{2a-3}$, $\frac{4a}{2a+3}$ и $\frac{5b}{4a^2c-9c}$.

459. Решить уравнение:

1) $\frac{(2x+1)(x+3)}{75}-\frac{(4-x)(4+x)}{25}=\frac{x(x+2)}{15}$;

2) $\frac{x(x-1)}{7}-\frac{2(x^2+1)}{28}=\frac{(x-1)(x+2)}{14}$;

3) $\frac{(2-x)(2+x)}{3}-\frac{x-x^2}{4}=\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{7x^2}{36}$;

4) $\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{2x^2-3}{15}=\frac{(x-1)(x+1)}{3}$.

460*. Привести дроби к общему знаменателю:

1) $\frac{5a}{a^3-27}$, $\frac{a-3}{a^2+3a+9}$ и $\frac{1}{a-3}$;

2) $\frac{3}{x+2}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$ и $\frac{x+2}{x^2-2x+4}$;

3) $\frac{2m}{(m-n)^3}$, $\frac{2n}{(m-n)^2}$ и $\frac{1}{m^2-n^2}$;

4) $\frac{1}{k^3+3k^2+3k+1}$, $\frac{2}{k^2-1}$ и $\frac{3}{k^2+2k+1}$.

461*. Пусть n — натуральное число. Найти общий знаменатель дробей:

1) $\frac{1}{x^{4n}-y^{4n}}$; $\frac{1}{x^{2n}-y^{2n}}$; $\frac{1}{x^n-y^n}$;

2) $\frac{1}{a^{2n}-b^{2n}}$; $\frac{1}{a^n-b^n}$; $\frac{1}{a^n+b^n}$;

3) $\frac{1}{a^{2n}+2a^nb^n+b^{2n}}$; $\frac{1}{a^n+b^n}$; $\frac{1}{a^{2n}-b^{2n}}$;

4) $\frac{1}{x^{4n}-y^{4n}}$; $\frac{1}{x^n-y^n}$; $\frac{1}{x^{2n}-2x^ny^n+y^{2n}}$.

§ 26. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями выполняются по тем же правилам, что и сложение и вычитание обыкновенных дробей:

$$\boxed{\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}, \qquad \frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}}.$$

Задача 1. Сложить дроби $\frac{a-b}{a+b}$, $\frac{2a-b}{a+b}$ и $\frac{a-2b}{a+b}$.

$$\triangle\ \frac{a-b}{a+b}+\frac{2a-b}{a+b}+\frac{a-2b}{a+b}=\frac{a-b+2a-b+a-2b}{a+b}=$$

$$=\frac{4a-4b}{a+b}=\frac{4\cdot(a-b)}{a+b}. \ \blacktriangle$$

Задача 2. Найти разность дробей $\frac{a^2}{a+b}$ и $\frac{b^2}{a+b}$.

$$\triangle\ \frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b. \ \blacktriangle$$

Для сложения и вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями нужно привести эти дроби к общему знаменателю и воспользоваться правилом сложения или вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Задача 3. Сложить дроби $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{2a^2b}$ и $\frac{1}{3ab^2}$.

$\triangle$ Общим знаменателем данных дробей является произведение $6a^3b^2$. Следовательно,

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{3ab^2}=\frac{6b^2}{6a^3b^2}+\frac{3ab}{6a^3b^2}+\frac{2a^2}{6a^3b^2}=\frac{2a^2+3ab+6b^2}{6a^3b^2}. \ \blacktriangle$$

Задача 4. Найти разность дробей $\frac{a}{3b^2c}$ и $\frac{c}{15ab^2}$.

$$\triangle\ \frac{a}{3b^2c}-\frac{c}{15ab^2}=\frac{5a^2}{15ab^2c}-\frac{c^2}{15ab^2c}=\frac{5a^2-c^2}{15ab^2c}. \ \blacktriangle$$

Задача 5. Сложить дроби $\frac{1}{x^2-x}$ и $\frac{3}{x^2-1}$.

$\triangle$ Разложим многочлены, стоящие в знаменателях дробей, на множители:

$$x^2-x=x(x-1), \quad x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Общим знаменателем данных дробей является произведение $x(x-1)(x+1)$.

Приведя дроби к общему знаменателю, найдем:

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x+1}{x(x^2-1)}+\frac{3x}{x(x^2-1)}=\frac{x+1+3x}{x(x^2-1)}=\frac{4x+1}{x(x^2-1)}. \ \blacktriangle$$

Таким образом, для сложения или вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями нужно:

1) найти общий знаменатель дробей;
2) привести дроби к общему знаменателю;
3) сложить или вычесть полученные дроби;
4) упростить результат, если возможно.

Задача 6. Вычислить значение выражения

$$\frac{1}{a^2+4a+4}-\frac{4}{a^4+4a^3+4a^2}+\frac{4}{a^3+2a^2} \text{ при } a=0{,}5.$$

$\triangle$ Данное выражение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a^2+4a+4)}+\frac{4}{a^2(a+2)}=$$

$$=\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a+2)^2}+\frac{4}{a^2(a+2)}=\frac{a^2-4+4(a+2)}{a^2(a+2)^2}=\frac{a^2+4a+4}{a^2(a+2)^2}=\frac{1}{a^2}.$$

Следовательно, искомое значение равно

$$\frac{1}{0{,}5^2}=\frac{1}{0{,}25}=\frac{100}{25}=4. \ \blacktriangle$$

Упражнения

Выполнить действия (462—473).

462. 1) $\frac{c+d}{2a}+\frac{2c-d}{2a}$; 2) $\frac{a+2b}{3c^2}+\frac{5a-2b}{3c^2}$;

3) $\frac{a+b}{2c}-\frac{a-b}{2c}$; 4) $\frac{10a-b}{a^3}-\frac{3a-b}{a^3}$.

463. 1) $\frac{2}{3a}+\frac{1}{a}$; 2) $\frac{1}{b}-\frac{2}{5b}$; 3) $\frac{c}{15a}+\frac{d}{3}$; 4) $\frac{a}{4}-\frac{b}{12d}$.

464. 1) $5-\frac{2}{b}+\frac{3}{b^2}$; 2) $\frac{2}{c}+4-\frac{3}{c^2}$;

3) $d-\frac{c}{d}+\frac{c^2}{d^2}$; 4) $\frac{m}{n}-k+\frac{m^2}{n^2}$.

465. 1) $\frac{3c}{4a^3b}+\frac{5d}{6ab^3}$; 2) $\frac{2a}{9b^4}-\frac{7c}{6a^3b}$;

3) $\frac{2}{3y^3}-\frac{1}{6x^2y}+\frac{5}{12xy^3}$; 4) $\frac{b}{c}+\frac{b}{c^2d}+\frac{b}{cd^2}$.

466. 1) $\frac{2x}{3(a-b)}+\frac{x}{a-b}$; 2) $\frac{7x}{2(x-1)}-\frac{5x}{x-1}$;

3) $\frac{2a^2}{3(a+1)}+\frac{5a^2}{4(a+1)}$; 4) $\frac{4y}{5(y-3)}-\frac{5y}{2(y-3)}$.

467. 1) $\frac{3}{a^2+a}+\frac{5a}{ab+b}$; 2) $\frac{5b}{ax+ay}-\frac{2a}{bx+by}$;

3) $\frac{y+a}{b^2+ba}+\frac{y-b}{ab+a^2}$; 4) $\frac{y-b}{a^2-ab}-\frac{y-a}{ab-b^2}$.

468. 1) $\frac{a}{1-b^2}+\frac{1}{1+b}$; 2) $\frac{2}{x^2-9}+\frac{1}{x+3}$;

3) $\frac{5+p^2}{p^2-36}-\frac{p}{6+p}$; 4) $\frac{2x}{x-4}-\frac{5x-2}{x^2-16}$.

469. 1) $\frac{y}{n-2}+\frac{z}{2-n}$; 2) $\frac{p+2q}{3p-q}-\frac{5q-2p}{q-3p}$;

3) $\frac{2m}{3-5n}-1+\frac{7n-4}{5n-3}$; 4) $4-\frac{3a}{5-2b}+\frac{5(a-10)}{2b-5}$.

470. 1) $\frac{2x}{x-4}-\frac{5x-2}{16-x^2}$; 2) $\frac{12n-5}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$;

3) $\frac{c^2-8}{2c+3}-\frac{16c-2c^3}{9-4c^2}$; 4) $\frac{21y^2+1}{1-9y^2}-\frac{y}{3y-1}$.

471. 1) $\frac{3}{a+2}+\frac{2a}{(a+2)^2}$; 2) $\frac{a}{(3a+1)^2}+\frac{4}{3a+1}$;

3) $\frac{7}{(a-b)^2}-\frac{5}{b-a}$; 4) $\frac{4}{(m-n)^2}-\frac{7}{n-m}$.

472. 1) $a+\frac{a}{a-1}$; 2) $b)-\frac{b}{b-2}$; 3) $c+1-\frac{c^2}{c-1}$;

4) $\frac{a^2}{a+1}-a+1$.

---

473. 1) $\frac{7a-1}{2a^2+6a}+\frac{5-3a}{a^2-9}$; 2) $\frac{6}{3x+3y}+\frac{8x}{4x^2-4y^2}$;

3) $\frac{3a-b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a^2-ab}$; 4) $\frac{3a}{4a^2-1}-\frac{a+1}{2a^2+a}$;

5) $\frac{b-1}{(b+3)^2}-\frac{b}{b^2-9}$; 6) $\frac{a-3}{a^2-4}-\frac{a}{(a-2)^2}$

474. Найти значение выражения:

1) $\frac{7}{a+b}+\frac{8}{a-b}-\frac{16b}{a^2-b^2}$ при $a=0{,}05$, $b=-0{,}04$.

2) $\frac{3}{a+3}-\frac{2}{3-a}-\frac{12}{a^2-9}$ при $a=-8$;

3) $\frac{6x}{x^2-y^2}-\frac{3}{x-y}-\frac{4}{x+y}$ при $x=\frac{3}{7}$, $y=-\frac{1}{21}$;

4) $\frac{18}{9-4a^2}-\frac{4}{2a+3}+\frac{3}{2a-3}$ при $a=-0{,}6$.

475. Упростить:

1) $\frac{2y+8}{y^2-4y+4}-\frac{7}{y-2}$; 2) $\frac{4+6x}{1+6x+9x^2}-\frac{2}{3x+1}$;

3) $\frac{2}{25-10a+a^2}-\frac{10}{a^2-25}$; 4) $\frac{1}{x^2-6x+9}+\frac{1}{(x+3)^2}$.

476. Решить уравнение:

1) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}-\frac{3x-4}{3}=5$;

2) $2x+\frac{3x-1}{2}-\frac{5x-2}{3}=2$;

3) $\frac{8x+7}{6}-\frac{5x-2}{2}=3-\frac{3-2x}{4}$;

4) $\frac{4z}{3}-17+\frac{3z-17}{4}=\frac{z+5}{2}$.

477*. Найти разность дробей:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$; 2) $\frac{a^2+4}{a^3+8}-\frac{1}{a+2}$;

3) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}-\frac{1}{a+b}$; 4) $\frac{m^2-3m+9}{m^3-27}-\frac{1}{m-3}$.

478*. Найти значение выражения:

1) $\frac{8a^2}{a^3-1}+\frac{a+1}{a^2+a+1}$ при $a=2$;

2) $\frac{3c^2-c+8}{c^3-1}-\frac{c-1}{c^2+c+1}+\frac{2}{1-c}$ при $c=1\frac{1}{2}$.

479*. Упростить выражение, если n — натуральное число:

1) $\frac{1}{a^{2n}-b^{2n}}+\frac{1}{a^n+b^n}-\frac{1}{a^n-b^n}$;

2) $\frac{a^n+b^n}{a^{2n}+2a^nb^n+b^{2n}}+\frac{1}{a^n+b^n}-\frac{1}{a^n}$.

§ 27. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Умножение и деление алгебраических дробей выполняются по тем же правилам, что и умножение и деление обыкновенных дробей:

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}}.$$

З а д а ч а 1. Найти произведение дробей

$$\frac{1}{2xy},\ \frac{4x^2y^3}{5z} \text{ и } \frac{10z^2}{3x^3}.$$

$$\triangle\ \frac{1}{2xy}\cdot\frac{4x^2y^3}{5z}\cdot\frac{10z^2}{3x^3}=\frac{1\cdot4x^2y^3\cdot10z^2}{2xy\cdot5z\cdot3x^3}=\frac{4y^2z}{3x^2}.\ \blacktriangle$$

З а д а ч а 2. Умножить дроби $\frac{a-b}{a^2+ab}$ и $\frac{b^2+ab}{(a-b)^2}$.

$$\triangle\ \frac{a-b}{a^2+ab}\cdot\frac{b^2+ab}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)\,b\,(a+b)}{a\,(a+b)\,(a-b)^2}=\frac{b}{a\,(a-b)}.\ \blacktriangle$$

З а д а ч а 3. Выполнить деление дробей $\frac{m+n}{9m^2n^3}$ и $\frac{m^2-n^2}{27mn^2}$.

$$\triangle\ \frac{m+n}{9m^2n^3}:\frac{m^2-n^2}{27mn^2}=\frac{(m+n)\cdot27mn^2}{9m^2n^3\,(m^2-n^2)}=\frac{(m+n)\,3}{mn\,(m-n)\,(m+n)}=\frac{3}{mn\,(m-n)}.\ \blacktriangle$$

При возведении алгебраической дроби в степень используется формула

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}.$$

Например:

$$\left(\frac{4a^2}{b}\right)^2=\frac{16a^4}{b^2},\quad \left(\frac{a+b}{3c}\right)^3=\frac{(a+b)^3}{27c^3}.$$

У п р а ж н е н и я

Выполнить умножение дробей (480—481).

480. 1) $\frac{85}{24}\cdot\frac{72}{17}$; 2) $\frac{256}{169}\cdot\frac{13}{64}$; 3) $50\cdot\frac{7}{625}$; 4) $\frac{5}{26}\cdot39$.

481. 1) $\frac{a^3b}{c}\cdot\frac{c^2}{a^4}$; 2) $\frac{m^2n^2}{k}\cdot\frac{k^3}{m^3n^3}$; 3) $\frac{2a}{3b}\cdot6c$; 4) $14a^2\cdot\frac{b^2}{7c^3}$.

482. Выполнить деление дробей:

1) $\frac{8}{17}:\frac{8}{17}$; 2) $\frac{a}{b}:\frac{a}{b}$; 3) $\frac{3a}{7b}:\frac{m}{n}$;

4) $\frac{c}{2d}:\frac{3a}{5b}$; 5) $\frac{2a}{3b}:\frac{a^2}{bc}$; 6) $\frac{5m}{n^2}:\frac{10m^3}{n}$.

483. Выполнить деление дробей:

1) $\frac{4}{13}:5$; 2) $\frac{a}{b}:c$; 3) $12:\frac{8}{9}$; 4) $a:\frac{b}{c}$.

Выполнить действия (484—487).

484. 1) $\left(\frac{5a}{7b}\right)^2\cdot\frac{14b^3}{25a^3}$; 2) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3\cdot\frac{16b^3}{21a^4}$;

3) $\left(\frac{ab}{cd}\right)^2\cdot acd$; 4) $abc^2\cdot\left(\frac{ab}{cd}\right)^2$.

485. 1) $\frac{8a^2b}{9c}\cdot\frac{36c^3}{5a^3b}$; 2) $\frac{7b^4}{9c^3y}:\frac{35b^4c}{18c^4y^2}$; 3) $\frac{16x^2y}{7z}:\frac{10xy^3}{21z^2}$;

4) $\frac{46a^3c}{15a}:\frac{23dc^2}{5a^3}$; 5) $\frac{18m^3n^5}{7k}:(9n^2)$; 6) $24k^2:\frac{12m^4k^2}{11p^3n}$.

486. 1) $\frac{7-x}{a+b}\cdot\frac{a-b}{7-x}$; 2) $\frac{x-y}{2a}\cdot\frac{4b}{x-y}$; 3) $\frac{c+d}{c-d}:\frac{c}{c-d}$;

4) $\frac{a-b}{2b}:\frac{a-b}{6b^2}$; 5) $\frac{a^2-ab}{b}\cdot\frac{b^2}{a}$; 6) $\frac{ab+b^2}{9}:\frac{b^2}{3a}$.

487. 1) $\frac{a+1}{b}\cdot\frac{4b^2}{a^2-1}$; 2) $\frac{1-a}{3b^2}\cdot\frac{b^3}{1-a^2}$; 3) $\frac{a^2-b^2}{9b^2}:\frac{a+b}{3b}$;

4) $\frac{5m}{m^2-n^2}:\frac{15m^3}{m-n}$; 5) $\frac{3(x+y)}{4y^2(x^2+y^2)}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; 6) $\frac{5(a-b)}{3(a^2+b^2)}:\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$.

488. Найти значение выражения:

1) $\frac{a^2-b^2}{3a+3b}\cdot\frac{3a^2}{5b-5a}$ при $a=2{,}5$;

2) $\frac{5x^2-5y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{3x^2+3y^2}{10y-10x}$ при $x=\frac{5}{6}$, $y=\frac{2}{3}$;

3) $\frac{a^2-25}{a^2-3a}:\frac{a+5}{9-a^2}$ при $a=1$;

4) $\frac{3n^2-3m^2}{n^2+np}:\frac{6m-6n}{n+p}$ при $m=-9$, $n=-3$.

---

489. Проверить, верно ли равенство:

1) $\frac{a^2+b^2}{x^3+x^2y}\cdot\frac{x^2-y^2}{a^4-b^4}=\frac{x-y}{x\,(a^2-b^2)}$;

2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-ab}:\frac{a^4b-b^5}{a^2b-ab^2}=\frac{1}{a^2-b^2}$.

490. Упростить:

1) $\frac{a-5}{a^2+6a+9}\cdot\frac{(a+3)^2}{a^2-25}$; 2) $\frac{b^2-8b+16}{b+3}:\frac{(b-4)^2}{b^2-9}$;

3) $\frac{a^2-49}{a^2+2ab+b^2}\cdot\frac{a+b}{a-7}$; 4) $\frac{a^2-2a+1}{2a+1}:\frac{a-1}{4a^2-1}$.

491. Решить уравнение:

1) $\frac{3(x-11)}{4}=\frac{3(x+1)}{5}-\frac{2(2x-5)}{11}$;

2) $\frac{2(5x+2)}{9}-1=\frac{4(33+2x)}{5}-\frac{5(1-11x)}{9}$;

3) $\frac{8(x+10)}{15}-24\frac{1}{2}=\frac{7x}{10}-\frac{2(11x-5)}{5}$;

4) $\frac{2(x-4)}{3}+\frac{3x+13}{8}=\frac{3(2x-3)}{5}-7$.

492*. Решить уравнение относительно x, если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$, $a\neq -b$:

1) $\frac{a+b}{x}=\frac{a^2-b^2}{a}$; 2) $\frac{x}{a^2-b^2}=\frac{ab}{a^2-ab}$;

3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{b}=\frac{a^2-b^2}{x}$; 4) $\frac{ab^2-b^3}{a^2b-ab^2}=\frac{x}{a^2+2ab+b^2}$.

493*. Упростить:

1) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}:\frac{8a-8b}{a^3+b^3}$; 2) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{a^3-b^3}{7a+7b}$;

3) $\frac{n^3-m^3}{n^2-m^2}:\frac{n^2+nm+m^2}{n^2+2nm+m^2}$; 4) $\frac{m^2+2mn+n^2}{p^3+c^3}\cdot\frac{p+c}{2m+2n}$.

494*. Доказать, что при всех допустимых значениях a, b, x и y (n — натуральное число) верно равенство:

1) $\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a^{2n}+b^{2n}}\cdot\frac{a^{4n}-b^{4n}}{a^{2n}-2a^nb^n+b^{2n}}=(a^n+b^n)^2$;

2) $\frac{(x^n+y^n)^2}{x^{4n}-y^{4n}}:\frac{x^{2n}-y^{2n}}{x^{2n}+y^{2n}}=\frac{1}{(x^n-y^n)^2}$.

§ 28. СОВМЕСТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ДРОБЯМИ

Рассмотрим примеры совместного выполнения действий над алгебраическими дробями.

Задача 1. Упростить выражение $\left(\frac{a+1}{2a-2}-\frac{1}{2a^2-2}\right)\cdot\frac{2a+2}{a+2}$.

△ Выполним вычитание в скобках:

$$\frac{a+1}{2a-2}-\frac{1}{2a^2-2}=\frac{a+1}{2(a-1)}-\frac{1}{2(a^2-1)}=\frac{(a+1)^2-1}{2(a^2-1)}=$$

$$=\frac{(a+1-1)(a+1+1)}{2(a^2-1)}=\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}.$$

Найдем произведение:

$$\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}\cdot\frac{2a+2}{a+2}=\frac{a(a+2)2(a+1)}{2(a+1)(a-1)(a+2)}=\frac{a}{a-1}. ▲$$

Решение задачи 1 можно записать иначе:

$$△ \left(\frac{a+1}{2a-2}-\frac{1}{2a^2-2}\right)\cdot\frac{2a+2}{a+2}=\left(\frac{a+1}{2(a-1)}-\frac{1}{2(a^2-1)}\right)\cdot\frac{2(a+1)}{a+2}=$$

$$=\frac{((a+1)^2-1)2(a+1)}{2(a^2-1)(a+2)}=\frac{a(a+2)}{(a-1)(a+2)}=\frac{a}{a-1}. ▲$$

Задача 2. Выполнить действия:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right).$$

△ Выполним действие в первой скобке:

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{2a\cdot 2b}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

Выполним действие во второй скобке:

$$\frac{a+b}{a-b}-1=\frac{a+b-a+b}{a-b}=\frac{2b}{a-b}.$$

Выполним деление:

$$\frac{4ab}{a^2-b^2}:\frac{2b}{a-b}=\frac{4ab(a-b)}{(a^2-b^2)2b}=\frac{2a}{a+b}. ▲$$

Задача 3. Упростить выражение

$$\frac{2a}{a+1}-\frac{1}{a+1}\cdot\frac{(a+1)^2-1}{a+2}.$$

$$△ \frac{2a}{a+1}-\frac{1}{a+1}\cdot\frac{(a+1)^2-1}{a+2}=\frac{2a}{a+1}-\frac{1}{a+1}\cdot\frac{a(a+2)}{a+2}=$$

$$=\frac{2a}{a+1}-\frac{a}{a+1}=\frac{a}{a+1}. ▲$$

Упражнения

Выполнить действия (495—501).

495. 1) $\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{3}\right)\frac{1}{a^2}$; 2) $\frac{a^2}{3}\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{a^2}\right)$; 3) $\frac{a-b}{a+b}\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}\right)$;

4) $\frac{ab}{a-b}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$; 5) $1:\left(1-\frac{1}{a}\right)$; 6) $b:\left(b+\frac{1}{b}\right)$.

496. 1) $\left(1+\frac{1}{a}\right):\left(1-\frac{1}{a}\right)$; 2) $\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b}\right)$.

497. 1) $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(2+\frac{2b}{a-b}\right)$; 2) $\left(1+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(2-\frac{2a}{a+b}\right)$.

498. 1) $\left(\frac{6}{a-b}-\frac{5}{a+b}\right)\frac{a-b}{a+11b}$; 2) $\left(\frac{3}{c}+\frac{3}{c+d}\right)\frac{c}{18(2c+d)}$;

3) $\frac{y-1}{y}:\left(\frac{y^2+1}{y^2+2y}-\frac{2}{y+2}\right)$; 4) $\frac{m-2}{m-5}:\left(\frac{m^2+24}{m^2-25}-\frac{4}{m-5}\right)$.

499. 1) $\frac{a^2+ab}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$; 2) $\frac{ab-b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)$;

3) $\left(\frac{c+d}{c}-\frac{2c}{c-d}\right)\frac{d-c}{c^2+d^2}$; 4) $\left(\frac{2c}{c+d}+\frac{d-c}{c}\right)\frac{c+d}{c^2+d^2}$.

500. 1) $\frac{a^2+2a+1}{b^2-4}\cdot\frac{b+2}{a+1}-\frac{a}{b+2}$; 2) $\frac{a^2-2a+1}{b-2}:\frac{a^2-1}{b^2-4}-\frac{2a-b}{a+1}$;

3) $\frac{m-1}{m+1}-\frac{m(1-m^2)}{n}\cdot\frac{n}{(m+1)^2}$; 4) $\frac{2n+4}{2-n}-\frac{mn+n^2}{4-4n+n^2}:\frac{m+n}{4-n^2}$.

---

501. 1) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)$;

2) $\left(\frac{2-a}{2+a}-\frac{a+2}{a-2}\right):\left(\frac{2+a}{2-a}+\frac{a-2}{a+2}\right)$;

3) $\left(\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2+2xy+y^2}\right):\left(\frac{x}{x+y}-\frac{x^2}{x^2-y^2}\right)$;

4) $\left(\frac{m^2}{m-n}+\frac{m^2n}{m^2-2mn+n^2}\right):\left(\frac{2m^2}{m^2-n^2}-\frac{m}{m+n}\right)$.

502. Найти значение выражения:

1) $x^2-\frac{x^3-4xy^2}{x^3-2x^2y+xy^2}\cdot\frac{x^2-2xy+y^2}{x-2y}$ при $x=-5$, $y=-\frac{1}{2}$;

2) $\frac{3}{2}-\frac{3n^2-6n+3}{2n^2+2n+2}:\frac{n-1}{n^3+n^2+n}$ при $n=\frac{1}{3}$;

3) $\left(\frac{3}{a-b}-\frac{3a}{b^2-a^2}\right):\frac{6a+3b}{a^2+2ab+b^2}$ при $a=3\frac{1}{4}$, $b=-0{,}75$;

4) $\left(\frac{mn}{m^2-n^2}+\frac{n}{2n-2m}\right)\frac{m^2-n^2}{2n}$ при $m=6\frac{1}{2}$, $n=-1{,}5$.

503*. Выполнить действия:

1) $\left(\frac{c-d}{c^2+dc}-\frac{c}{d^2+cd}\right):\left(\frac{d^2}{c^3-cd^2}+\frac{1}{c+d}\right)$;

2) $\left(\frac{2n}{k+2n}-\frac{4n^2}{k^2+4nk+4n^2}\right):\left(\frac{2n}{k^2-4n^2}+\frac{1}{2n-k}\right)$;

3) $\left(\frac{b^2}{b+x}-\frac{b^3}{b^2+x^2+2bx}\right):\left(\frac{b}{b+x}-\frac{b^2}{b^2-x^2}\right)$;

4) $\left(\frac{2q}{2q+m}-\frac{4q^2}{4q^2+4mq+m^2}\right):\left(\frac{2q}{4q^2-m^2}+\frac{1}{m-2q}\right)$.

504*. Доказать, что если $x+\frac{1}{x}=a$, то $x^3+\frac{1}{x^3}=a(a^2-3)$.

505*. Доказать, что если $-1<x<1$, то значение выражения $\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{4x}\right)$ отрицательно.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

506. Решить уравнение:

1) $2x+\frac{5x-5}{7}=\frac{8x+7}{3}$; 2) $\frac{x+5}{24}-\frac{3x-8}{16}=1$;

3) $2x+1+\frac{2x-1}{6}=\frac{7x-15}{4}$; 4) $\frac{3(2x-2{,}5)}{5}-2x+2{,}5=\frac{2-x}{2}$.

507. Найти неизвестное число x из пропорции:

1) $\frac{a}{x}=\frac{2b}{3}$; 2) $\frac{4a}{3b}=\frac{2x}{a}$;

3) $\frac{x}{a+b}=\frac{a}{(a+b)^2}$; 4) $\frac{a+1}{a-1}=\frac{a^2-1}{ax}$.

508. Решить уравнение:

1) $\frac{(2x-1)^2}{8}-\frac{x(2x-3)}{4}=\frac{x-3}{2}$;

2) $\frac{(1-5x)^2}{48}-\frac{(2x-1)(2x+1)}{9}=\frac{x+0{,}25x^2}{12}$;

3) $\frac{0{,}03-x^2}{9}-\frac{(0{,}1+x)^2}{18}=\frac{(0{,}1-x)(0{,}1+x)}{6}$;

4) $\frac{(3x+4)^2}{36}+\frac{3x(1-x)}{18}=\frac{(x-4)(x+4)}{12}$.

509. Найти значение выражения:

1) $\frac{2x}{4x^2-y^2}-\frac{1}{2x+y}-\frac{y}{4x^2-y^2}$ при $x=0{,}37$, $y=-1{,}4$;

2) $\frac{x^2-1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1+x}+1\right)$ при $x=\frac{1}{2}$.

Выполнить действия (510—512).

510. 1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}-\frac{b^2}{a^2-ab}$; 2) $\frac{5b-1}{3b^2-3}+\frac{b+2}{2b+2}-\frac{b+1}{b-1}$;

3) $\frac{6a}{9a^2-1}+\frac{3a+1}{3-9a}+\frac{3a-1}{6a+2}$; 4) $\frac{7}{m}-\frac{4}{m-2n}-\frac{m-n}{4n^2-m^2}$;

5) $x-\frac{xy}{x+y}-\frac{x^3}{x^2-y^2}$; 6) $a-2+\frac{4a}{2+a}-\frac{a^3+b}{a^2+2a}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найти допустимые значения букв, входящих в дробь:

$$\frac{a}{b};\ \frac{3}{a-1};\ \frac{a}{b+2}.$$

2. Выполнить действия:

$$4a+\frac{1-4a^2}{a};\ \frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b};\ \frac{2a-4}{3b}\cdot\frac{6b}{a-2};\ \frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}.$$

3. Упростить выражение $\frac{1+2x}{x-3}-\frac{x^2+3x}{5}\cdot\frac{10}{x^2-9}$ и найти его числовое значение при $x=2\frac{2}{3}$.

511. 1) $\frac{64x^2y^2-1}{x^2-4}\cdot\frac{(x+2)^2}{x^2-4}\cdot\frac{(x-2)^2}{8xy+1}$;

2) $\frac{x-6}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x^2+4x+4}{(x^2+2)(x-2)}\cdot\frac{x^3-9x}{(x-6)(x+2)}$;

3) $\frac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2}:\frac{am^2-2amn+an^2}{3m+3n}$;

4) $\frac{ab-4b-2a+8}{2a+8-ab-4b}:\frac{2a-8-ab+4b}{ab+4b-2a-8}$.

512. 1) $\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}$;

2) $\left(\frac{b}{a^2+ab}+\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\frac{a^2-b^2}{4ab}$;

3) $\frac{a^2-c^2}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{ac+c^2}\cdot\left(a+\frac{ac}{a-c}\right)$;

4) $\frac{c^2-ac}{a^2-b^2}\cdot\frac{a-b}{c^2-a^2}:\left(c-\frac{ac}{a+c}\right)$.

513. Масса куска льда объемом V м^3 равна p килограммам. Чему равна масса куска объемом V_1 м^3?

514. Автомобиль, двигаясь со скоростью v километров в час, прошел s километров. Какой путь пройдет за то же время мотоцикл, если его скорость равна u километрам в час?

515. Собственная скорость моторной лодки v километров в час, а скорость течения реки v_1 километров в час. Двигаясь по течению, лодка прошла s километров. Какое расстояние пройдет за это же время моторная лодка при движении против течения?

516. Бассейн наполняется одной трубой за a часов, другой — за b часов. За сколько часов наполнится бассейн, если одновременно открыть две трубы?

517. Две машинистки, работая вместе, напечатали рукопись за a часов. Одна из них могла бы выполнить эту работу за b часов. За какое время могла бы напечатать рукопись другая машинистка?

518. Сопротивление R участка цепи, состоящего из двух параллельно соединенных проводников, вычисляется по формуле $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. Выразить из этой формулы: 1) R через R_1 и R_2; 2) R_1 через R и R_2.

519. Давление p бензина на дно цистерны равно 69 580 Па (паскалей), плотность ρ бензина равна 710 кг/м^3. С помощью микрокалькулятора найти высоту h цистерны с бензином, если $p=g\rho h$, где $g=9{,}8$.

520*. Сократить дробь:

1) $\frac{2ab-b}{8a^3-1}$; 2) $\frac{27a^3+b^3}{3ab+b^2}$; 3) $\frac{36c-c^3}{c^3+12c^2+36c}$;

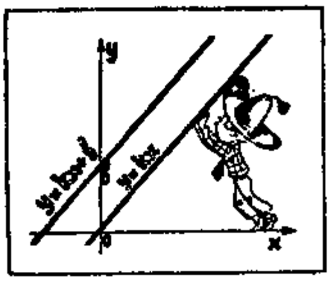
4) $\frac{25b-49b^3}{49b^3-70b^2+25b}$; 5) $\frac{2a^5-128a^2}{(2a^2+8a+32)(a^4-4a^3)}$; 6) $\frac{2a^4+3a^3+2a+3}{(a^2-a+1)(2a+3)}$

521*. Выполнить действия:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$; 2) $\frac{a^2+4}{a^3+8}-\frac{1}{a+2}$;

3) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}-\frac{1}{a+b}$; 4) $\frac{m^2-3m+9}{m^3-27}-\frac{1}{m-3}$.

522*. Доказать, что если $a+b\neq0$, $b+c\neq0$, $c+a\neq0$ и $a^3+b^3+c^3+abc=0$, то $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$.



Глава VI
ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

§ 29. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Напомним, что две взаимно перпендикулярные прямые с выбранными направлениями и единицей длины образуют *прямоугольную систему координат* на плоскости. Плоскость, на которой выбрана система координат, называют *координатной плоскостью.*

Прямые углы, образуемые осями координат, называют *координатными углами (квадрантами)* и нумеруют так, как показано на рисунке 11.

Абсциссу и ординату точки M называют *координатами точки* M. Запись $M(x; y)$ означает, что точка M имеет абсциссу x и ординату y (рис. 12). Например, в записи $M(3; 5)$ число 3 — абсцисса, число 5 — ордината точки M.

В записи координат точек порядок чисел имеет существенное значение. Например, $M_1(1; 2)$ и $M_2(2; 1)$ — различные точки плоскости (рис. 13).

Если точка лежит на оси абсцисс, то ее ордината равна нулю. Например, точка A (рис. 14) имеет координаты $(2; 0)$.

Использование прямоугольной системы координат на плоскости связано с именем выдающегося французского математика XVII в. Рене Декарта (1596—1650).

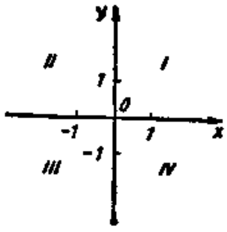


Рис. 11

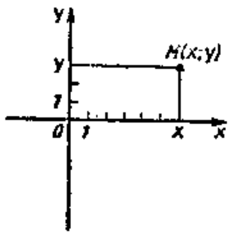


Рис. 12

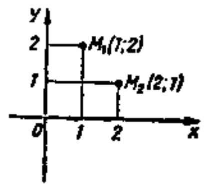


Рис. 13

Если точка лежит на оси ординат, то ее абсцисса равна нулю. Например, точка B (рис. 14) имеет координаты $(0; -2)$.

Начало координат имеет абсциссу и ординату, равные нулю: $O(0; 0)$.

Задача. Построить точку $M(-3; 2)$.

△ На оси абсцисс отметим точку с координатой -3 и проведем через нее перпендикуляр к этой оси. На оси ординат отметим точку с координатой 2 и проведем через нее перпендикуляр к оси ординат. Точка пересечения этих перпендикуляров — искомая точка M (рис. 15). ▲

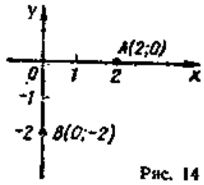


Рис. 14

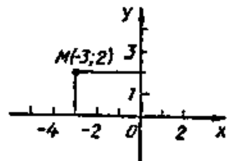


Рис. 15

Упражнения

523. Назвать абсциссу и ординату точки: $(1; 0)$ $(4; 0)$, $(0; 2)$, $(-6; 0)$, $(0; -7)$, $(0; 0)$.

524. Построить точки и указать, каким координатным углам они принадлежат:

1) $A(3; 4)$, $B(2; -5)$, $C(-2; 5)$, $E(-6; -2)$, $F\left(3; -\frac{1}{2}\right)$, $K(3; 0)$, $M(0; -1,5)$, $N\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$;

2) $A(-1,5; 2,5)$, $B(-2,5; 1,5)$, $C\left(3\frac{1}{2}; 1\right)$, $F(2; -2)$, $K(-3,5; 3,5)$ $M(0; 2,5)$.

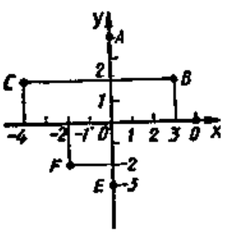


Рис. 16

525. По рисунку 16 найти координаты точек A, B, C, D, E, F.

526. Построить прямую, проходящую через точки:

1) $A(3;\ -2)$ и $B(-2;\ 2)$;
2) $M(2;\ 0)$ и $N(0;\ -2)$.

527. Построить отрезок по координатам его концов:

1) $A(3;\ 4)$, $B(-6;\ 5)$;
2) $M(0;\ -5)$, $N(4;\ 0)$.

---

528. Построить треугольник по координатам его вершин:

1) $K(-2;\ 2)$, $M(3;\ 2)$, $N(-1;\ 0)$;
2) $A(0;\ -1)$, $B(0;\ 5)$, $C(4;\ 0)$.

529. Построить прямоугольник по координатам его вершин:

$A(-2;\ 0)$, $B(-2;\ 3)$, $C(0;\ 3)$, $O(0;\ 0)$.

530. Даны три вершины $A(1;\ 2)$, $B(4;\ 2)$, $C(4;\ 5)$ квадрата $ABCD$. Найти координаты точки D и построить этот квадрат.

531. Построить прямую, проходящую через точки $A(0;\ 5)$ и $B(-2;\ 5)$. Чему равны ординаты точек, лежащих на прямой AB?

532*. Построить прямую, проходящую через точки $A(-2;\ 3)$ и $B(-2;\ -1)$. Чему равны абсциссы точек, лежащих на прямой AB?

533. Даны точки $A(5;\ 3)$, $B(-1;\ -2)$, $C(0;\ 4)$, $D(-2;\ 0)$, $E(-2;\ 3)$. Построить точки, симметричные им относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат. Определить координаты полученных точек.

534*. На плоскости расположены точки $A(2;\ 7)$, $B(3;\ 4)$, $C(2;\ -7)$, $D(-3;\ -4)$, $E(-2;\ 7)$. Определить, какие пары этих точек симметричны относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.

535*. Квадрат со стороной 4 расположен так, что центр его находится в начале координат, а стороны параллельны осям координат. Определить координаты вершин квадрата.

§ 30. ФУНКЦИЯ

Задача 1. Поезд движется из Москвы в Ленинград со скоростью 120 км/ч. Какой путь пройдет поезд за t часов?

△ Если обозначить искомый путь буквой s (в км), то ответ можно записать формулой

$$s=120t. \ \blacktriangle \qquad (1)$$

При движении поезда путь s и время t изменяются. Поэтому их называют *переменными*.

Например, если $t=\frac{1}{2}$, то $s=120\cdot\frac{1}{2}=60$; если $t=2$, то $s=240$; если $t=2{,}5$, то $s=300$ и т. д.

Так как значения s зависят от выбора значений t, то t называют *независимой переменной*, а s — *зависимой переменной* или *функцией*. Зависимость переменной s от переменной t называют *функциональной зависимостью*.

Для того чтобы подчеркнуть, что s зависит от t, пишут $s(t)$ (читается: «s от t»). Например, $s\left(\frac{1}{2}\right)=60$, $s(2)=240$, $s(2{,}5)=300$.

Таким образом, формула (1) устанавливает правило вычисления пути s по заданному значению времени t. В этой задаче время t положительно и не может быть больше времени движения поезда от Москвы до Ленинграда.

Задача 2. Поезд движется из Москвы в Ленинград со скоростью 120 км/ч. За какое время он пройдет путь, равный s километрам?

△ Если обозначить искомое время буквой t (в ч), то ответ можно записать формулой

$$t=\frac{s}{120}. \ \blacktriangle \qquad (2)$$

Например, если $s=180$, то $t=1{,}5$; если $s=300$, то $t=2{,}5$. Таким образом, в этой задаче s является независимой переменной, а t — зависимой переменной, т. е. функцией $t(s)$. Например, $t(180)=1{,}5$; $t(300)=2{,}5$.

Формула (2) устанавливает правило вычисления времени по заданному значению пути s. Здесь s может принимать положительные значения, не большие, чем расстояние от Москвы до Ленинграда.

Обычно в математике независимая переменная обозначается буквой x, а зависимая переменная — буквой y. В этом случае пишут $y(x)$. Но такое обозначение не является обязательным. Например, в задаче 1 путь s является функцией времени t; при этом пишут $s(t)=120t$. В задаче 2 время t является функцией пути s, и поэтому пишут $t(s)=\frac{s}{120}$.

Функция может быть задана различными способами.

1. **Ф у н к ц и я м о ж е т б ы т ь з а д а н а ф о р м у л о й.** Например, формула $y=2x$ показывает, как по данному значению x вычислить соответствующее значение функции y.

З а д а ч а 3. Функция задана формулой $y=x^2+x+1$. Найти $y(-2)$, $y(0)$ и $y(1)$.

△ 1) Подставляя в эту формулу $x=-2$, получаем $y(-2)=(-2)^2+(-2)+1=4-2+1=3$;

2) $y(0)=0^2+0+1=1$;

3) $y(1)=1^2+1+1=3$.

О т в е т. $y(-2)=3$, $y(0)=1$, $y(1)=3$. ▲

З а д а ч а 4. Функция задана формулой $y=-3x+5$. Найти значение x, при котором значение y равно -1.

△ Подставляя в формулу вместо y число -1, получаем $-1=-3x+5$.

Решая это уравнение, находим $3x=5+1$, $x=2$.

О т в е т. $x=2$. ▲

Задачу 4 можно также решить, выразив из формулы $y=-3x+5$ переменную x через y, т. е. по формуле $x=\frac{5-y}{3}$ найти x при $y=-1$.

2. Ф у н к ц и я м о ж е т б ы т ь з а д а н а т а б л и ц е й, например:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	4	9	16	25	36	49	64

Согласно этой таблице значению $x=3$ соответствует $y=9$, а значению $x=5$ соответствует $y=25$.

Примеры табличного способа задания функции: таблица квадратов натуральных чисел, таблица кубов натуральных чисел, таблица прироста вклада в сберегательном банке в зависимости от суммы вклада.

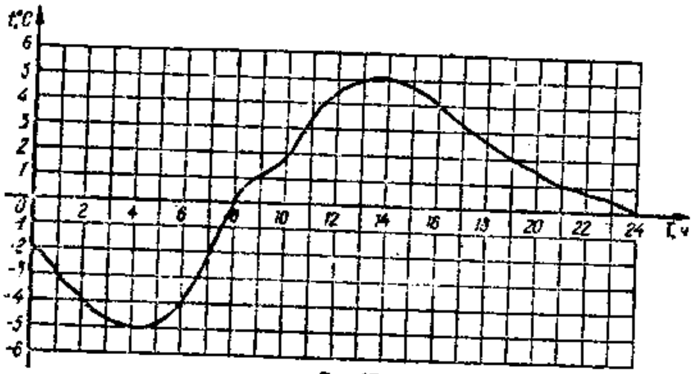


Рис. 17

3. Ф у н к ц и я м о ж е т б ы т ь з а д а н а г р а ф и к о м. Для того чтобы наглядно представить функциональную зависимость, используют специальные рисунки (чертежи), которые называют *графиками*. Графики функций широко применяются в практике. С помощью графика часто изображают, например, зависимость температуры от времени (рис. 17); железнодорожники пользуются графиками движения; экономисты графически изображают рост производительности труда. При построении графиков в научных исследованиях и современном производстве используются самопишущие приборы и ЭВМ.

Предположим, что на координатной плоскости изображен график некоторой функции $y(x)$ (рис. 18). Для того чтобы по заданному графику найти значение функции $y(x)$ при каком-то определенном значении x, проведем через точку оси абсцисс с координатой x перпендикуляр к этой оси и найдем точку M пересечения его с графиком данной функции. Ордината точки пересечения и даст соответствующее значение функции.

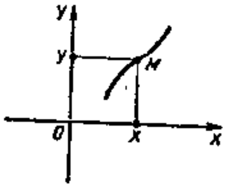


Рис. 18

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной, а ординаты — соответствующим значениям функции.

З а д а ч а 5. Дана функция $y=x^2+2$. **Выяснить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами:**

1) (1; 3), 2) (2; 2).

△ 1) Найдем значение y при $x=1$: $y(1)=1^2+2=3$.

Так как $y(1)=3$, то точка (1; 3) принадлежит графику данной функции.

2) $y(2)=2^2+2=6$.

Точка графика с абсциссой $x=2$ имеет ординату $y=6$, поэтому точка (2; 2) не принадлежит графику данной функции. ▲

Упражнения

536. (Устно.) Прочитать следующие выражения, назвать независимую и зависимую переменную:

$s(t)=120t$, $p(x)=17{,}8x$, $C(R)=2\pi R$, $m(V)=7{,}8V$,

$y(x)=\frac{1}{7}x+3$, $t(s)=\frac{s}{120}$, $x(y)=7y-21$, $f(x)=2-5x^2$.

537. Вычислить значение функции y при x, равном -2; -1; 0; 1; 2:

1) $y=3x$; 2) $y=-2x$; 3) $y=-x-3$; 4) $y=20x+4$.

538. Функция задана формулой $s=60t$, где s — путь (в км) и t — время (в ч).

1) Определить $s(2)$, $s(3{,}5)$, $s(6)$.

2) Определить t, если $s=240$.

539. Функция задана формулой $y=2x-1$.

1) Вычислить значение y при x, равном 10; $-4{,}5$; 15; -21.

2) Найти значение x, при котором значение y равно -19; 205; $-3\frac{1}{2}$.

540. Функция задана формулой $p(x)=\frac{1}{3}(2x+1)$.

1) Найти $p(3)$, $p(-12)$, $p(2{,}1)$.

2) Найти значение x, если $p(x)=0$, $p(x)=2{,}4$, $p(x)=-9$.

541. Функция задана формулой $f(x)=2-5x^2$. Верно ли равенство:

1) $f(-2)=-18$; 2) $f\left(-\frac{1}{5}\right)=1\frac{4}{5}$;

3) $f(4)=78$; 4) $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$?

542. Функция задана формулой $y(x)=2x^2+5x$.

1) Найти $y(0)$, $y(-1)$, $y(2)$, $y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y\left(-\frac{3}{5}\right)$.

2) Верны ли равенства: $y(-3)=3$, $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$, $y(1)=9$, $y(2)=-18$?

543. (Устно.) Следующая таблица выражает зависимость атмосферного давления p от высоты h над уровнем моря:

h, км	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20
p, мм рт. ст.	760,0	716,0	674,0	596,1	525,7	462,2	404,8	198,1	40,9

1) Назвать давление на высоте 1 км, 3 км, 5 км, 10 км.

2) На какой высоте над уровнем моря давление равно 760,0 мм рт. ст., 462,2 мм рт. ст., 40,9 мм рт. ст.?

544. (Устно.) Результаты измерений температуры воздуха за сутки даны в следующей таблице:

Время, ч	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура, °С	-1	1	-3	-4	$2\frac{1}{2}$	5	8	$10\frac{1}{2}$	11	9	6	$3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$

1) Назвать температуру в 6 ч, 18 ч, 24 ч.

2) В какое время температура была равна $+1°$, $-4°$, $11°$?

545. На рисунке 17 изображен график изменения температуры воздуха в течение суток.

1) По графику найти температуру воздуха в 2 ч, 6 ч, 12 ч, 18 ч.

2) В какое время суток температура воздуха была равна 0°, $-4°$, 1°, 3°?

3) В какое время суток температура была самой высокой? самой низкой?

4) В какое время суток температура опускалась ниже 0°?

546. На рисунке 19 изображен график зависимости долготы дня от времени года. По оси ординат отложена долгота дня первого числа каждого месяца. По оси абсцисс — номер месяца.

1) В каком месяце долгота дня первого числа равна 600 мин, 750 мин, 850 мин?

2) В какое время года долгота первого дня месяца больше 700 мин, меньше 600 мин?

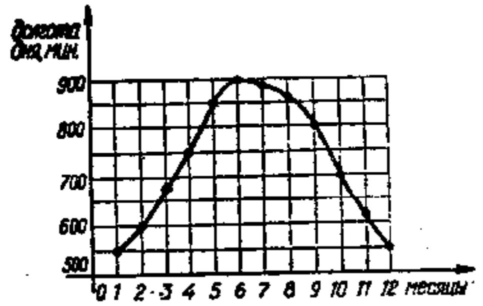


Рис. 19

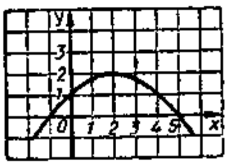


Рис. 20

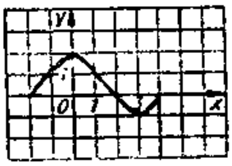


Рис. 21

3) Какова долгота дня в первый день января, марта, мая, июля, октября?

547. Функция $y(x)$ задана графиком (рис. 20).

1) Найти $y(0)$, $y(2)$, $y(4)$, $y(-1)$.

2) При каком значении x значение функции равно 1, 2, 0?

3) Назвать несколько значений x, при которых значение функции положительно.

4) Назвать несколько значений x, при которых значение функции отрицательно.

548. Функция $y(x)$ задана графиком (рис. 21).

1) Найти $y(0)$, $y(-2)$, $y(1)$, $y(3)$.

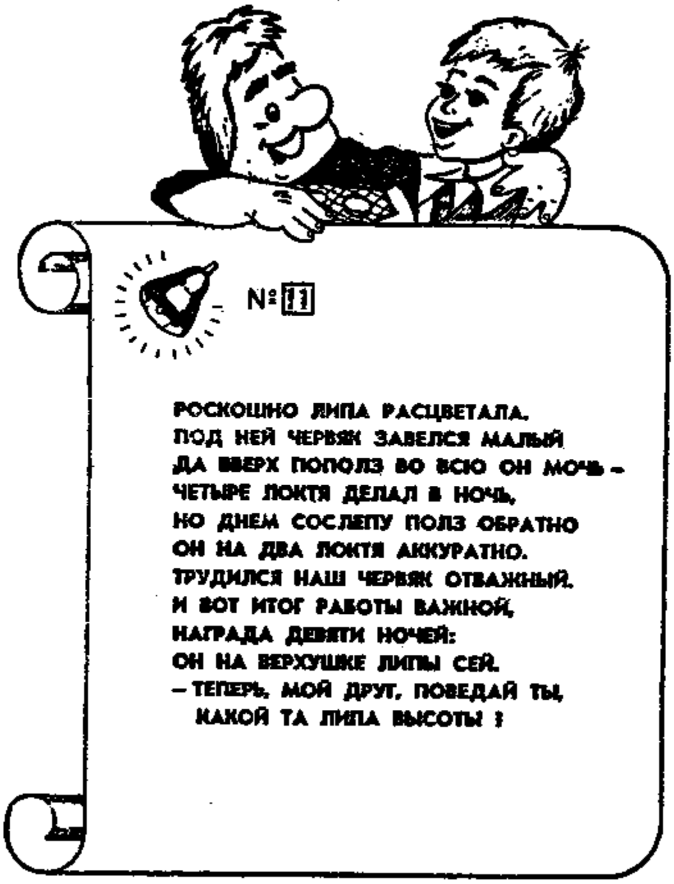
2) При каком значении x значение функции равно 2, 0, -1, 1?

3) Назвать несколько значений x, при которых значение функции положительно.

4) Назвать несколько значений x, при которых значение функции отрицательно.

549. Дана функция $y=x^2-5x+6$. Выяснить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами:

1) (1; 2), 2) (−2; 0), 3) (−2; 20) 4) (3; 0).



550. Дана функция $y=x^3-1$. Выяснить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами:

1) (−1; 1), 2) (1; 0), 3) (3; 27), 4) (−2; 7).

551. Одна сторона прямоугольника равна x, другая — на 3 см больше. Выразить через x периметр P и площадь S этого прямоугольника.

1) Найти значение каждой из функций $P(x)$ и $S(x)$ при $x=5$, $x=2,1$.

2) При каком значении x периметр этого прямоугольника будет равен 38 см, 46 см?

552*. Плотность гранита составляет 2600 кг/м³. Выразить массу m как функцию от его объема V.

1) Найти значение функции при $V=1,5$ (м³), $V=10$ (м³).

2) Каков должен быть объем гранита, чтобы его масса была 5,2 ц, 7,8 т?

553*. Заполнить таблицу (перечертив ее в тетрадь):

1)

x				4	0	-2
$y=\frac{1}{2}x+3$	5	7	-13			

2)

x	-2	-1	0			
$y=-7x+1$				1	8	15

554*. График функции $y(x)$ — ломаная $ABCDE$, где $A(-2;\ 2)$, $B(0;\ 4)$, $C(5;\ 4)$, $D(9;\ 2)$, $E(13;\ -2)$.

1) Построить этот график.

2) Используя график функции, найти $y(-1)$, $y(0)$, $y(10)$.

3) При каком значении x значение функции $y(x)$ равно 3; -1; 0?

4) Указать три значения x, при которых функция принимает положительные значения, и три значения x, при которых функция принимает отрицательные значения.

555*. График функции — ломаная $EFKLM$, где $E(-1;\ 1)$, $F(2;\ -2)$, $K(5;\ -2)$, $L(6;\ -3)$, $M(7;\ -6)$.

1) Построить этот график.

2) По графику найти натуральные значения x, при которых значение функции равно -2.

3) По графику найти натуральные значения x, при которых значение функции больше -2.

§ 31. ФУНКЦИЯ $y=kx$ И ЕЕ ГРАФИК

Найдем площадь прямоугольника, основание которого равно 3, а высота равна x. Если искомую площадь обозначить буквой y, то ответ можно записать формулой $y=3x$.

Если основание прямоугольника равно k, то зависимость между высотой x и площадью y выразится формулой $y=kx$. Каждое заданное значение k определяет некоторую функцию

$$y=kx. \qquad (1)$$

Построим график этой функции при $k=2$, т. е. функции

$$y=2x. \qquad (2)$$

По формуле (2) вычислим значения y для нескольких значений x.

Возьмем, например, $x=2$, получим $y=4$. Если $x=0$, то $y=2\cdot 0=0$; если $x=-3$, то $y=2\cdot(-3)=-6$; если $x=\frac{1}{2}$, то $y=2\cdot\frac{1}{2}=1$ и т. д.

Построим точки с найденными координатами: $(2;4)$, $(0;\ 0)$, $(-3;\ -6)$, $\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$. Приложив линейку, можно убедиться, что все построенные точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Эта прямая и является графиком функции $y=2x$ (рис. 22).

Можно показать, что *графиком функции $y=kx$ при любом значении k является прямая, проходящая через начало координат.*

Из курса геометрии известно, что через две точки проходит единственная прямая, поэтому, для того *чтобы построить график функции $y=kx$, достаточно построить две точки графика, а затем с помощью линейки провести через эти точки прямую.*

Так как начало координат принадлежит графику функции $y=kx$, то для построения этого графика достаточно найти еще одну точку.

З а д а ч а. Построить график функции $y=kx$ при: 1) $k=1$; 2) $k=-1$; 3) $k=0$.

△ 1) Пусть $k=1$, тогда $y=x$. Если $x=1$, то $y=1$. Поэтому точка (1; 1) принадлежит графику. Для построения графика функции $y=x$ проведем прямую, проходящую через точки (0; 0) и (1; 1).

5 Зак. 290

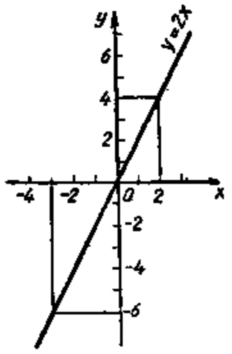


Рис. 22

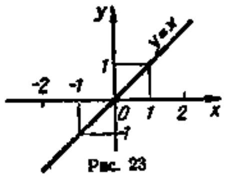


Рис. 23

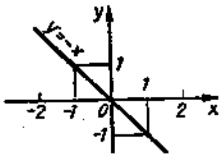


Рис. 24

Эта прямая делит первый и третий координатные углы пополам (рис. 23).

2) Пусть $k=-1$, тогда $y=-x$. Если $x=1$, то $y=-1$. Поэтому точка $(1;\ -1)$ принадлежит графику.

Прямая, проходящая через точки $(0;\ 0)$ и $(1;\ -1)$, является графиком функции $y=-x$.

Эта прямая делит второй и четвертый координатные углы пополам (рис. 24).

3) Пусть $k=0$, тогда $y=0$. Это означает, что ординаты всех точек графика равны нулю. Поэтому графиком этой функции является прямая, совпадающая с осью абсцисс. ▲

На рисунке 25 изображены графики функций

$$y=4x,\ y=\frac{1}{5}x,\ y=-\frac{1}{2}x,\ y=-3x.$$

(!) Если значения x, y положительны и $k>0$, то зависимость между переменными x и y, выражаемую формулой $y=kx$, обычно называют *прямой пропорциональной зависимостью*, а число k — *коэффициентом пропорциональности*.

Например, путь, пройденный телом при движении с постоянной скоростью, прямо пропорционален времени движения. Масса газа постоянной плотности прямо пропорциональна его объему.

Если y прямо пропорционален x, то при увеличении значения x в несколько раз значение y увеличивается во столько же раз.

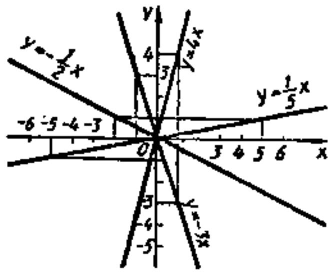


Рис. 25

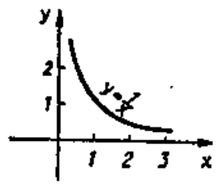


Рис. 26

(!) Часто встречается такая зависимость y от x, что при увеличении значения x в несколько раз значение y уменьшается во столько же раз. Эта зависимость называется *обратной пропорциональностью* и выражается формулой

$$y=\frac{k}{x},$$

где $k>0$, $x>0$.

Например, при равномерном движении на одном и том же пути скорость обратно пропорциональна времени. Плотность вещества при постоянной массе обратно пропорциональна его объему.

На рисунке 26 изображен график обратной пропорциональности при $k=1$, т. е. график функции $y=\frac{1}{x}$, $x>0$.

Упражнения

556. Книга стоит 2 р. Выразить формулой зависимость между купленным числом n экземпляров этой книги и уплаченной суммой y, выраженной в рублях. Чему равно: $y(6)$, $y(11)$?

557. Автомобиль «Волга» движется по шоссе со скоростью 80 км/ч. Записать формулу, выражающую зависимость длины пути s (в км) от времени движения t (в ч). Чему равно: $s(3)$, $s(5{,}4)$?

558. Построить график функции:

1) $y=3x$; 2) $y=5x$; 3) $y=-4x$; 4) $y=-0{,}8x$.

559. Построить график функции:

1) $y=1,5x$; 2) $y=-2,5x$; 3) $y=-0,2x$.

560. Построить график функции:

1) $y=2\frac{1}{2}x$; 2) $y=\frac{1}{4}x$; 3) $y=0,6x$.

561. Построить график функции, заданной формулой $y=-1,5x$. Найти по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному 1; 0; 2; 3;

2) значение x, если значение y равно -3; 4,5; 6;

3) несколько целых значений x, при которых значения y положительны (отрицательны).

562. Построить график функции, заданной формулой $y=0,2x$. Найти по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному -5; 0; 5;

2) значение x, если значение функции равно -2; 0; 2;

3) несколько значений x, при которых значения y отрицательны (положительны).

563. Построить график функции и указать, внутри каких координатных углов расположен этот график:

1) $y=\frac{1}{3}x$; 2) $y=-\frac{1}{3}x$;

3) $y=4,5x$; 4) $y=-4,5x$.

564. Какие из точек $A(5;\ -3)$, $B(-2;\ 4)$, $C(0;\ 0)$, $D(2;\ 1)$, $E(-5;\ 2,5)$ принадлежат графику функции, заданной формулой $y=\frac{1}{2}x$?

565. Прямая пропорциональная зависимость площади S прямоугольника от его ширины x представлена таблицей:

x	3,1	2,5	1,3	0,9	0,14		
$S(x)$					0,7	0,3	0,1

Устно найти по таблице коэффициент пропорциональности k и заполнить таблицу.

566. Масса m тела прямо пропорциональна его объему V. Устно найти коэффициент пропорциональности ρ из данной таблицы и заполнить таблицу:

V, см³	11,2	10,5	9,3			
$m(V)$			3,1	7,2	0,63	0,45

567. Тело, двигаясь равномерно, прошло путь AB за 5 с. Двигаясь обратно, оно увеличило скорость и прошло путь BA за 2,5 с. Во сколько раз изменилась скорость движения тела на обратном пути?

568. Для перевозки некоторого количества зерна автомашина, имеющая грузоподъемность 4 т, сделала 15 рейсов. Какую грузоподъемность должна иметь автомашина, чтобы такое же количество зерна перевезти за 12 рейсов?

569. Обратная пропорциональность $y=\frac{k}{x}$ представлена таблицей:

x	6	4,5	3	2,4				
y				0,5	1,8	1,5	0,6	0,1

Устно найти k и заполнить таблицу.

570. По графику функции $y=kx$ определить знак коэффициента k: 1) рис. 27; 2) рис. 28.

571. Зависимость между переменными x и y выражена формулой $y=kx$. Определить k, если $y=-5$ при $x=2,5$.

Рис. 27

Рис. 28

572. Прямая OA проходит через начало координат и точку $A\left(\frac{1}{2}; 7\right)$. Графиком какой из следующих функций является эта прямая: $y=7x$, $y=-14x$, $y=14x$?

573. Построить график функции $y=kx$, если известно, что ему принадлежит точка B: 1) $B(2; -3)$; 2) $B\left(3\frac{1}{3}; -2\right)$. График какой из этих функций проходит через точку $M(-10; 15)$?

574*. Плот плывет по реке со скоростью 2 км/ч. Выразить путь s, пройденный плотом за x часов. Вычислить путь, пройденный плотом за 1 ч, 2,5 ч, 4 ч. Построив график зависимости пути плота от времени движения, найти по графику время, за которое плот пройдет 6 км.

575*. Пешеход идет со скоростью 3 км/ч. Выразить путь s, пройденный пешеходом за t часов. Построить график пути в зависимости от времени. Найти по графику путь, пройденный пешеходом за 0,5 ч, 1 ч, 1 ч 30 мин.

576*. На рисунке 29 изображены графики движения автомобиля (——) и автобуса (- - -). Используя графики, ответить на вопросы:

1) Какой путь прошел за первые 3 ч автобус? автомобиль?

2) Какой была скорость до остановки?

3) Какой путь прошла каждая из автомашин до остановки?

4) Сколько времени двигался до остановки автобус? автомобиль?

5) Какой была продолжительность стоянки автобуса и автомобиля?

Рис. 29

6) Какой стала скорость движения автобуса и автомобиля после остановки?

577*. Двигаясь равномерно, автомобиль прошел путь в 120 км. Записать формулу зависимости времени движения t от его скорости v. Найти $t(60)$; $t(45)$; $t(50)$.

578. Двигаясь равномерно, велосипедист проехал 70 км. Записать формулу зависимости скорости велосипедиста v от времени t нахождения его в пути. Найти $v(5)$; $v(7)$; $v(3,5)$.

§ 32. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Линейной функцией называется функция вида $y=kx+b$, где k и b — заданные числа.

Можно показать, *что графиком линейной функции $y=kx+b$ является прямая.* Так как прямая определяется двумя ее точками, то *для построения графика функции $y=kx+b$ достаточно построить две точки этого графика.*

Задача 1. Построить график функции $y=2x+5$.

△ При $x=0$ значение функции $y=2x+5$ равно 5, т. е. точка $(0; 5)$ принадлежит графику.

Если $x=1$, то $y=2\cdot1+5=7$, т. е. точка $(1; 7)$ также принадлежит графику. Построим точки $(0; 5)$ и $(1; 7)$ и проведем через них прямую. Эта прямая и является графиком функции $y=2x+5$ (рис. 30). ▲

Заметим, что каждая точка графика функции $y=2x+5$ имеет ординату, на 5 единиц большую, чем точка графика функции $y=2x$ с той же абсциссой. Это означает, что каждая точка графика функции $y=2x+5$ получается сдвигом на 5 единиц вверх вдоль оси ординат соответствующей точки графика функции $y=2x$.

Вообще график функции $y=kx+b$ получается сдвигом графика функции $y=kx$ на b единиц вдоль оси ординат. Графиками функций $y=kx$ и $y=kx+b$ являются параллельные прямые.

Отметим, что для построения графика линейной функции иногда удобно находить точки пересечения этого графика с осями координат.

Задача 2. Найти точки пересечения графика функции $y=-2x+4$ с осями координат и построить график.

△ Найдем точку пересечения графика с осью абсцисс. Ордината этой точки равна 0. Поэтому $-2x+4=0$, откуда $x=2$.

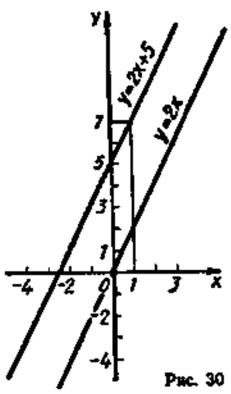


Рис. 30

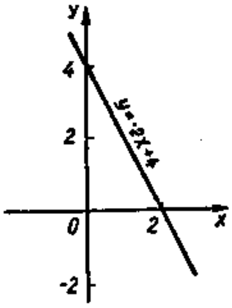


Рис. 31

Итак, точка пересечения графика с осью абсцисс имеет координаты (2; 0).

Найдем точку пересечения графика с осью ординат. Так как абсцисса этой точки равна 0, то $y=-2\cdot 0+4=4$.

Итак, точка пересечения графика с осью ординат имеет координаты (0; 4). График функции $y=-2x+4$ изображен на рисунке 31. ▲

Задача 3. Построить график линейной функции $y=kx+b$ при $k=0$, $b=2$.

△ Если $k=0$ и $b=2$, то $y=2$. Ординаты всех точек графика равны 2, и поэтому графиком функции является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку (0; 2) (рис. 32). ▲

С помощью линейной функции описываются многие физические процессы. Например, при равнопеременном движении скорость является линейной функцией времени: $v=v_0+at$.

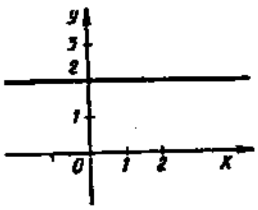


Рис. 32

Упражнения

579. (Устно.) Является ли линейной функция, заданная формулой:
1) $y=-x-2$; 2) $y=2x^2+3$; 3) $y=\frac{x}{3}$; 4) $y=250$; 5) $y=\frac{3}{x}+8$; 6) $y=-\frac{x}{5}+1$?

580. Дана линейная функция $y(x)=3x-1$.
1) Найти $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$.
2) Найти значение x, если $y(x)=-4$, $y(x)=8$, $y(x)=0$.

581. Построить график функции:
1) $y=2x+1$; 2) $y=-2x+1$; 3) $y=3x-4$;
4) $y=0{,}5x-1$; 5) $y=\frac{1}{4}x-2$; 6) $y=\frac{1}{2}x+2$.

582. Построить график функции, заданной формулой $y=2x+3$. Найти по графику:
1) значение y, соответствующее значению x, равному -1; 2; 3; 5;
2) при каком значении x значение y равно 1; 4; 0; -1.

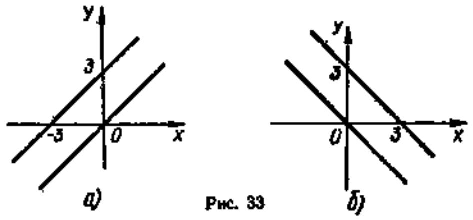
583. Построить график функции, заданной формулой $y=-2x-1$. Найти по графику:
1) значение y, соответствующее значению x, равному 2; -2; $-1\frac{1}{2}$;
2) при каком значении x значение y равно -5; 2; 6.

584. Линейная функция задана формулой $y=x+2$. Принадлежат ли точки $M(0; 2)$, $N(1; 3)$, $A(-1; 1)$, $B(-4{,}7; -2{,}7)$, $C\left(-2\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ графику этой функции?

585. Не выполняя построения графика функции $y=2x-\frac{1}{3}$, выяснить, проходит ли он через точку:
1) $\left(0; -\frac{1}{3}\right)$; 2) $(1; -2)$; 3) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; 4) $(2; 3)$.

586. 1) Построить график функции $y=-0{,}5x-2$ и указать по графику несколько значений x, при которых значения функции положительны (отрицательны).
2) Построить график функции $y=-4x+3$ и указать по графику несколько значений x, при которых значения функции отрицательны (положительны).

587. Построить график функции, найдя точки пересечения его с осями координат:
1) $y=2x+2$; 2) $y=-\frac{1}{2}x-1$; 3) $y=4x+8$;
4) $y=-3x+6$; 5) $y=2{,}5x+5$; 6) $y=-6x-2$.



а) Рис. 33 б)

588. Построить график функции:

1) $y=7$; 2) $y=-3{,}5$; 3) $y=\frac{1}{4}$; 4) $y=0$.

---

589. (Устно.) Как из графика функции $y=-2x$ можно получить графики функций $y=-2x+3$ и $y=-2x-3$?

590. (Устно.) Как из графика функции $y=\frac{1}{3}x$ можно получить графики функций $y=\frac{1}{3}x+2$ и $y=\frac{1}{3}x-2$?

591. 1) На складе было 400 т угля. Ежедневно на склад привозили еще по 50 т. Выразить формулой зависимость количества угля p (в тоннах) от времени t (в днях).

2) На складе было 400 т угля. Ежедневно из этого запаса расходовалось по 50 т. Выразить формулой зависимость количества угля p (в тоннах), находящегося на складе, от времени t (в днях).

592. Турист проехал от города 10 км на автобусе, а затем продолжал движение в том же направлении пешком со скоростью 5 км/ч. На каком расстоянии y турист был от города через x часов ходьбы?

593. На рисунке 33, *а*, *б* изображены пары параллельных прямых. Запишите формулой функцию, график которой — прямая, проходящая через:

1) начало координат на рисунке 33, *а*;

2) точку с координатами (0; 3) на рисунке 33, *б*.

594. Найти значение b, если известно, что график функции $y=-3x+b$ проходит через точку: 1) $M(-2; 4)$; 2) $N(5; 2)$.

595. Найти значение k, если известно, что график функции $y=kx+2$ проходит через точку: 1) $P(-7; -12)$; $C(3; -7)$.

596*. Определить координаты точек пересечения с осями координат графика функции $y=13-x$ и вычислить площадь прямоугольного треугольника, ограниченного этой прямой и координатными осями.

597*. Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y=-2x+7$ и $y=0{,}5x-5{,}5$;

2) $y=4x$ и $y=-x+10$;

3) $y=1-2x$ и $y=x-5$.

598**. Найти значения k и b, если известно, что график функции $y=kx+b$ проходит через точки (2; 10) и (−7; −10).

599**. Прямые $y=0$, $y=3$, $x=0$, $x=2$ образуют прямоугольник. Принадлежит ли точка $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ диагонали этого прямоугольника?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

600. 1) Построить треугольник ABC по координатам его вершин $A(-3; 0)$, $B(4; 5)$, $C(0; -4)$. Найти координаты точки пересечения стороны AB с осью Oy.

2) Построить треугольник DCE по координатам его вершин $D(-4; 0)$, $C(0; -2)$, $E(5; 3)$. Найти координаты точки пересечения стороны CE с осью Ox.

601. Функция $y=y(x)$ задана графиком (рис. 34). Пользуясь этим графиком, найти:

1) $y(-2)$, $y(1)$, $y(3)$, $y(0)$;

2) значение x, при котором функция принимает значение, равное: −1; 0; 3;

3) координаты точек пересечения графика с осями координат;

4) целые значения x, при которых функция положительна;

5) целые значения x, при которых функция отрицательна.

602. Функция $y=kx$ задана таблицей. Найти коэффициент k, заполнить таблицу:

1)

x	−5	$-\frac{1}{2}$	0	3		
y				−12	16	$\frac{1}{4}$

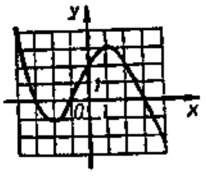


Рис. 34

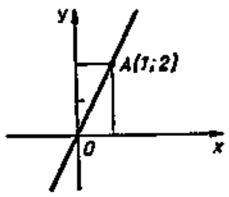


Рис. 35

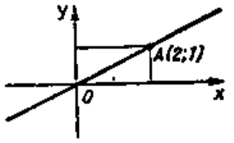


Рис. 36

2)

x	-8	-4	2	1			
y				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0

603. 1) Велосипедист движется со скоростью 10 км/ч. Записать формулу его пути s за время движения t. Построить график движения на первых пяти километрах пути.

2) Плотность железа равна 7,8 г/см^3. Записать формулу массы m железа объема v. Построить график этой зависимости.

604. Найти значение k, если график функции $y=kx$ проходит через точку:

1) $B(-30;\ 3)$; 2) $A(4;\ -80)$.

605. Записать формулой функцию, график которой — прямая, изображенная:

1) на рисунке 35;
2) на рисунке 36;
3) на рисунке 37;
4) на рисунке 38.

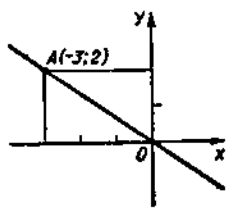


Рис. 37

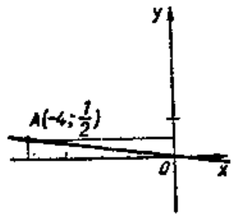


Рис. 38

606. При начале нагревания вода в кипятильнике имела температуру 6°C. При нагревании температура воды повышалась каждую минуту на 2°C. Найти формулу, выражающую изменение температуры T воды в зависимости от времени t ее нагревания. Будет ли функция $T(t)$ линейной? Чему равны $T(20)$, $T(31)$? Через сколько минут после начала нагревания вода закипит?

607. Найти координаты точек пересечения графика с осями координат:

1) $y=-1{,}5x+3$; 2) $y=-2x+4$; 3) $y=1{,}5x-6$;

4) $y=0{,}8x-0{,}6$; 5) $y=-\frac{1}{4}x+2$; 6) $y=\frac{2}{3}x-5$.

Построить графики этих функций.

608. Построить график функции $y=kx+1$, если известно, что ему принадлежит точка: 1) $M(1;\ 3)$; 2) $M(2;\ -7)$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Дана функция $y=5x-1$. Найти $y(0{,}2)$ и значение x, при котором значение функции равно 89.
   Принадлежит ли точка $A(-11;\ 54)$ графику этой функции?
2. Построить график функции:

$$y=2x;\ y=x-2;\ y=3;\ y=3-4x.$$

609. Построить график функции $y=-3x+b$, если известно, что этот график проходит через точку: 1) $A(-2;\ 4)$; 2) $A(5;\ 2)$.

610. В одной системе координат построить графики функций:

1) $y=\frac{1}{2}x+1$; $y=\frac{1}{2}x$; $y=-\frac{1}{2}x-3$;

2) $y=\frac{1}{4}x+1$; $y=-\frac{1}{4}x+1$; $y=-\frac{1}{4}x-1$;

3) $y=0$; $y=2$; $y=-1$.

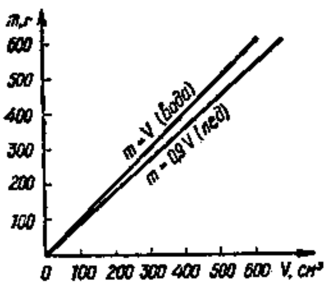


Рис. 39

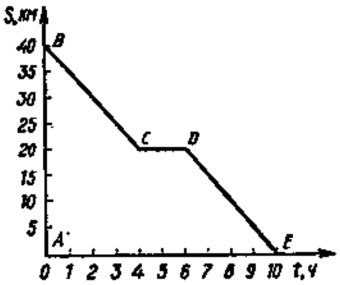


Рис. 40

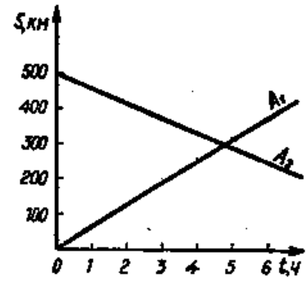


Рис. 41

611. Заполнить пропуски в тексте:

1) прямая $y=2x$ проходит через точку (...; 4);

2) прямая $y=3x-4$ отсекает на оси ординат от ее начала отрезок длиной...;

3) прямая $y=2x-6$ отсекает на оси абсцисс от ее начала отрезок длиной...;

4) среди прямых $y=x-7$, $y=5x+2$, $y=3x-7$, $y=x+4$, $y=-x-7$ параллельными являются... .

612*. Используя график зависимости массы m воды и льда от объема V (рис. 39), ответить на вопросы:

1) Является ли функция $m(V)$ линейной?

2) Какой объем занимают лед и вода, если они имеют одинаковую массу, равную 500 г?

613*. На рисунке 40 изображен график движения пешехода из пункта B в пункт A. Используя этот график, ответить на вопросы:

1) На каком расстоянии от пункта A находится пункт B?

2) С какой скоростью двигался пешеход?

3) На каком расстоянии от пункта B он сделал привал?

4) Сколько времени длился привал?

5) Через какое время после привала пешеход прибыл в пункт B?

Записать формулой функцию $s(t)$ на участках графика BC, DE, CD.

614*. Автомобили A_1 и A_2 выезжают одновременно навстречу друг другу. По заданному графику движения автомобилей (рис. 41) найти:

1) время от начала движения до встречи автомобилей;

2) путь, пройденный каждым из автомобилей до их встречи;

3) скорость движения каждого автомобиля.

Глава VII
СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

§ 33. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

З а д а ч а. Ученик задумал два числа и сказал, что сумма этих чисел равна 10, а их разность равна 4. Можно ли по этим данным узнать, какие числа задумал ученик?

△ Обозначим первое искомое число буквой x, второе — буквой y.

По условию задачи

$$x+y=10, \qquad (1)$$

$$x-y=4. \qquad (2)$$

Если оба равенства (1) и (2) верные, то их можно сложить (т. е. сложить левые и правые части равенств). Получим также верное равенство

$$(x+y)+(x-y)=10+4,$$

откуда $2x=14$, $x=7$.

Теперь вычтем из равенства (1) равенство (2). Получим:

$$2y=6,\ y=3.$$

О т в е т. 7 и 3. ▲

В равенствах (1), (2) буквами x и y обозначены неизвестные числа, или, короче, неизвестные. Эти равенства называют *линейными уравнениями с двумя неизвестными*.

Так как в этих уравнениях неизвестные числа одни и те же, то эти уравнения рассматривают совместно и говорят, что они образуют систему двух уравнений:

$$\begin{cases} x+y=10, \\ x-y=4. \end{cases} \qquad (3)$$

Фигурная скобка, стоящая слева, показывает, что нужно найти такую пару чисел (x; y), которая обращает каждое уравнение в верное равенство.

Система уравнений (3) — пример *системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.*

Рассмотрим еще один пример системы уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)=3x+2y, \\ 5x+3y=0. \end{cases} \qquad (4)$$

Можно проверить, что два числа $x=3$ и $y=-5$ обращают каждое из уравнений системы (4) в верное равенство:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(3-5)=3\cdot3+2\cdot(-5), \\ 5\cdot3+3\cdot(-5)=0. \end{cases}$$

Пару чисел (3; -5) называют решением системы (4).

(!) ***Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными*** *называют такую* ***пару чисел*** *x и y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство.*

Решить систему уравнений *— это значит найти все ее решения или установить, что их нет.*

В общем виде систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными записывают так:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — заданные числа, а x и y — неизвестные.

Например, в системе (3) $a_1=1$, $b_1=1$, $c_1=10$, $a_2=1$, $b_2=-1$, $c_2=4$.

Упражнения

615. В линейных уравнениях с двумя неизвестными выразить сначала x через y, а затем y через x:
1) $x+2y=5$; 2) $3x-y=-2$;
3) $5x-3y=6$; 4) $2x+7y=3$.

616. Найти такое значение x, которое вместе с числом $y=2$ образует решение уравнения $3x+0{,}5y=6$. Подобрать еще две пары значений x и y, которые являются решениями этого уравнения.

617. (Устно.) Проверить, что числа $x=40$, $y=20$ являются решением системы:

$$\begin{cases} x+y=60, \\ x-y=20. \end{cases}$$

618. (Устно.) Проверить, что числа $x=4$, $y=3$ являются решением системы

$$\begin{cases} 2{,}5x-3y=1, \\ 5x-6y=2. \end{cases}$$

619. Дана система уравнений

$$\begin{cases} 4x+3y=6, \\ 2x+y=4. \end{cases}$$

Из следующих пар чисел найти ту, которая удовлетворяет данной системе:

1) $x=0$, $y=2$; 2) $x=3$, $y=-2$.

620. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=-1, \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=5. \end{cases}$$

Из следующих пар чисел найти ту, которая удовлетворяет данной системе:

1) $x=10$, $y=0$; 2) $x=6$, $y=-6$.

---

621. Привести пример системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, решением которой будет пара чисел:

1) $x=4$, $y=-2$; 2) $x=7$, $y=5$.

622. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x-3y=c_1, \\ 2x+4y=c_2. \end{cases}$$

Известно, что пара чисел $x=5$, $y=2$ является ее решением. Найти c_1 и c_2.

623. Дана система уравнений

$$\begin{cases} ax-3y=11, \\ 11x+by=29. \end{cases}$$

Известно, что пара чисел $x=1$, $y=-2$ является ее решением. Найти значения a и b.

624*. Имеет ли решения система уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=5, \\ x+y=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-2y=4, \\ x-y=3? \end{cases}$

625*. Найти подбором два решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} u+v=7, \\ uv=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u+v=10, \\ uv=21. \end{cases}$

§ 34. СПОСОБ ПОДСТАНОВКИ

З а д а ч а 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+y=4. \end{cases} \qquad (1)$$

△ Предположим, что x и y — это такие числа, при которых оба равенства системы (1) являются верными, т. е. x и y — решение системы (1).

Перенесем $2x$ из левой части верного равенства $2x+y=4$ в правую часть; получим также верное равенство:

$$y=4-2x. \qquad (2)$$

Теперь рассмотрим первое уравнение системы (1):

$$x+2y=5. \qquad (3)$$

Напомним, что по предположению x и y — такие числа, что равенство (3) является верным. Заменим в этом равенстве число y равным ему числом $4-2x$, т. е. подставим вместо y его значение $4-2x$. Получим $x+2(4-2x)=5$.

Из этого равенства находим $x+8-4x=5$, $-3x=-3$, $x=1$.

Подставляя $x=1$ в равенство (2), получаем $y=4-2\cdot1=2$.

Подведем итог проделанных рассуждений. Предположив, что система (1) имеет решение, мы получили, что $x=1$ и $y=2$ и других решений нет. Осталось убедиться, что эта пара чисел на самом деле является решением системы (1), т. е. осталось показать, что при $x=1$, $y=2$ оба уравнения системы становятся верными равенствами.

Подставим найденные значения x и y в оба уравнения системы (1) и выполним вычисления:

$$\begin{cases} 1+2\cdot 2=5, \\ 2\cdot 1+2=4. \end{cases}$$

Оба равенства верные.

Итак, система (1) имеет единственное решение: $x=1$, $y=2$. ▲

Рассмотренный способ решения системы (1) называется *способом подстановки*. Он заключается в следующем:

1) из одного уравнения системы (все равно из какого) выразить одно неизвестное через другое, например y через x;

2) полученное выражение подставить в другое уравнение системы, получится одно уравнение с одним неизвестным x;

3) решив это уравнение, найти значение x;

4) подставив найденное значение x в выражение для y, найти значение y.

Задача 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y=16, \\ 5x+3y=-5. \end{cases}$$

△ 1) Из первого уравнения находим $-2y=16-3x$, $y=\frac{16-3x}{-2}$, т. е. $y=-8+\frac{3}{2}x$.

2) Подставляем $y=-8+\frac{3}{2}x$ во второе уравнение системы:

$$5x+3\left(-8+\frac{3}{2}x\right)=-5.$$

3) Решаем это уравнение:

$$5x-24+\frac{9}{2}x=-5,\ \frac{19}{2}x=19,\ x=2.$$

4) Подставляя $x=2$ в равенство $y=-8+\frac{3}{2}x$, находим:

$$y=-8+\frac{3}{2}\cdot 2=-5.$$

Ответ. $x=2$, $y=-5$. ▲

Задача 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{6}+\frac{y}{3}=2, \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-3. \end{cases}$$

△ Упростим уравнения системы:

$$\begin{cases} x+2y=12, \\ 2x-3y=-18. \end{cases} \qquad (4)$$

1) Из первого уравнения системы (4) находим:

$$x=12-2y.$$

2) Подставляем $x=12-2y$ во второе уравнение системы (4):

$$2\cdot(12-2y)-3y=-18.$$

3) Решаем это уравнение:

$$24-4y-3y=-18,\ 7y=42,\ y=6.$$

4) Подставляя $y=6$ в равенство $x=12-2y$, находим:

$$x=12-2\cdot 6=0.$$

Ответ. (0; 6). ▲

Упражнения

626. В каждом из уравнений выразить одно неизвестное через другое:

1) $x+y=7$; 2) $x-y=10$; 3) $2x-y=5$;
4) $x+3y=11$; 5) $2x+3y=7$; 6) $5y-3x=3$.

Решить систему уравнений (627—632).

627. 1) $\begin{cases} x=2+y, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+y=4, \\ x=3+2y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=11-2x, \\ 5x-4y=8; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-2y=11, \\ y=2x-5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y=2-4x, \\ 8x=5-3y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-5y=8, \\ x=-y. \end{cases}$

628. 1) $\begin{cases} x+5y=7, \\ 3x-2y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-3y=17, \\ x-2y=-13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+12y=11, \\ 5x-3y=3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y-3x=5, \\ 5x+2y=23; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 3x-2y=5; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x=5y, \\ -3x+8y=-13. \end{cases}$

629. 1) $\begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=5, \\ \frac{x}{4}-\frac{y}{3}=0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=3, \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{8}{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{5x}{2}+\frac{y}{5}=-4, \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{6}=\frac{1}{6}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{2x}{3}-\frac{5y}{4}=-3, \\ \frac{5x}{6}+\frac{7y}{8}=6. \end{cases}$

---

630. 1) $\begin{cases} 3(x-y)+5x=2(3x-2), \\ 4x-2(x+y)=4-3y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2-5(0{,}2y-2x)=3(3x+2)+2y, \\ 4(x-2y)-(2x+y)=2-2(2x+y); \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10+5(x-5y)=6(x-4y), \\ 2x+3(y+5)=-5-2(y-2x); \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3(y-2x)-(5y+2)=5(1-x), \\ 7-6(x+y)=2(3-2x)+y. \end{cases}$

631. 1) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8, \\ \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+y}{9}-\frac{x-y}{3}=2, \\ \frac{2x-y}{6}-\frac{3x+2y}{3}=-20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{7x-2y}{2}+2x=6, \\ \frac{5y-8x}{3}-y=-2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{2}(2x-y)-1=y-2, \\ \frac{1}{4}(3x-7)=\frac{1}{5}(2y-3)+1. \end{cases}$

632. 1) $\begin{cases} 2x+y-8=0, \\ 3x+4y-7=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-4y-2=0, \\ 5y-x-6=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{7y-x}{3}=-2, \\ \frac{x+14y}{8}=4{,}5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{7x-y}{2}=-3, \\ \frac{-8x+5y}{2}=3{,}5. \end{cases}$

§ 35. СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ

З а д а ч а 1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 7x-2y=27, \\ 5x+2y=33. \end{cases} \qquad (1)$$

△ Предположим, что x и y — это такие числа, при которых оба равенства системы (1) верны, т. е. $(x; y)$ — решение системы (1).

Сложим эти равенства. Тогда снова получим верное равенство, так как к равным числам прибавляются равные числа:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 7x-2y=27 \\ 5x+2y=33 \end{array} \\ \hline 12x=60, \end{array}$$

откуда $x=5$.

Теперь подставим $x=5$ в одно из уравнений системы (1), например в первое: $7\cdot5-2y=27$.

Из этого равенства находим $35-2y=27$, $-2y=-8$, $y=4$.

Итак, если система (1) имеет решение, то этим решением может быть только пара чисел: $x=5$, $y=4$.

Теперь нужно убедиться в том, что $x=5$, $y=4$ в самом деле являются решением системы (1):

$$\begin{cases} 7\cdot5-2\cdot4=27, \\ 5\cdot5+2\cdot4=33. \end{cases}$$

Оба равенства верные.

Итак, система (1) имеет единственное решение: $x=5$, $y=4$. ▲

Рассмотренный способ решения системы уравнений называется *способом алгебраического сложения*. Для исключения одного из неизвестных нужно выполнить сложение или вычитание левых и правых частей уравнений системы.

З а д а ч а 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x+3y=29, \\ 5x-4y=8. \end{cases}$$

△ Вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 5x+3y=29 \\ 5x-4y=8 \end{array} \\ \hline 7y=21, \end{array}$$

откуда $y=3$.

Подставим $y=3$ в первое уравнение системы: $5x+3\cdot3=29$.

Решая это уравнение, находим $5x+9=29$, $5x=20$, $x=4$.

О т в е т. $x=4$, $y=3$. ▲

Из рассмотренных примеров видно, что способ алгебраического сложения оказывается удобным для решения системы в том случае, когда у обоих линейных уравнений коэффициенты при каком-нибудь неизвестном одинаковы или отличаются только знаком. Если это не так, то можно уравнять модули коэффициентов при каком-нибудь одном из неизвестных, умножая левую и правую части каждого уравнения на подходящие числа.

З а д а ч а 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y=10, \\ 5x+3y=12. \end{cases}$$

△ Обе части первого уравнения системы умножим на 3, а второго — на 2 и вычтем из второго уравнения полученной системы первое:

$$\begin{cases} 3x+2y=10, \\ 5x+3y=12. \end{cases}\left|\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right. \qquad -\begin{array}{r} 10x+6y=24 \\ \underline{9x+6y=30} \\ x=-6 \end{array}$$

Подставив найденное значение $x=-6$ в первое уравнение данной системы, получим $-18+2y=10$, $2y=28$, $y=14$.

О т в е т. $x=-6$, $y=14$. ▲

Итак, для решения системы линейных уравнений способом алгебраического сложения нужно:

1) уравнять модули коэффициентов при одном из неизвестных;

2) складывая или вычитая полученные уравнения, найти одно неизвестное;

3) подставляя найденное значение в одно из уравнений исходной системы, найти второе неизвестное.

З а д а ч а 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x-3y=14, \\ x+2y=-2. \end{cases} \qquad (2)$$

△ 1) Оставляя первое уравнение без изменений, умножим второе уравнение на 4:

$$\begin{cases} 4x-3y=14, \\ 4x+8y=-8. \end{cases} \qquad (3)$$

2) Вычитая из второго уравнения системы (3) первое уравнение, находим $11y=-22$, откуда $y=-2$.

3) Подставляя $y=-2$ во второе уравнение системы (2), находим $x+2\cdot(-2)=-2$, откуда $x=2$.

О т в е т. $x=2$, $y=-2$. ▲

Упражнения

Способом алгебраического сложения решить систему уравнений (633—640).

633. 1) $\begin{cases} 2x+y=11, \\ 3x-y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-2y=6, \\ 7x+2y=6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x+7y=40, \\ -4x+9y=24; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+3y=17, \\ 2y-x=13. \end{cases}$

634. 1) $\begin{cases} 4x+3y=-15, \\ 5x+3y=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-5y=1, \\ 4x-5y=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+5y=3, \\ x+4y=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2y-3x=6, \\ y-3x=9. \end{cases}$

635. 1) $\begin{cases} 4x+3y=-4, \\ 6x+5y=-7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-5y=-22, \\ 3x+2y=18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x=9y, \\ 5x+3y=66; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x+6y=0, \\ 3x+4y=4. \end{cases}$

636. 1) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1, \\ \frac{x}{4}+\frac{2y}{3}=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{4}=2, \\ \frac{x}{6}+\frac{y}{3}=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+\frac{x-y}{4}=11, \\ 3y-\frac{x+y}{3}=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x-\frac{x-y}{5}=11, \\ 2y-\frac{x+y}{3}=11. \end{cases}$

---

637. 1) $\begin{cases} x+5y-7=0, \\ x-3y=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-3y-4=0, \\ 5x+3y+1=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 36x+33y+3=0, \\ 12x-13y+25=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7x-3y+1=0, \\ 4x-5y+17=0. \end{cases}$

638. 1) $\begin{cases} 5(x+1)=2y+6, \\ 3(x-1)=3y-6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1-3y=2(x-2), \\ 1-3x=3y-2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4(x-2)-3(y+3)=1, \\ 3(x+2)-2(x-y)=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7(2x+y)-5(3x+y)=6, \\ 3(x+2y)-2(x+3y)=-6. \end{cases}$

639*. 1) $\begin{cases} \frac{x+3}{2}-\frac{y-2}{3}=2, \\ \frac{x-1}{4}+\frac{y+1}{3}=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{3}=6, \\ \frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{2y}{3}=\frac{5}{2}, \\ \frac{3x}{2}+2y=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{2,5x-2y}{2}-2x=3, \\ \frac{3x-2y}{3}+4=3x. \end{cases}$

640*. 1) $\begin{cases} (x+3)(y+5)=(x+1)(y+8), \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1); \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x+5)(y-2)=(x+2)(y-1), \\ (x-4)(y+7)=(x-3)(y+4). \end{cases}$

§ 36. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Геометрической иллюстрацией уравнения с двумя неизвестными служит его график на координатной плоскости.

Рассмотрим уравнение

$$x-y=-1. \qquad (1)$$

Выразим из этого уравнения y через x:

$$y=x+1. \qquad (2)$$

Уравнение (2) можно рассматривать как формулу, задающую функцию y от x. Поэтому графиком уравнения (2) является прямая.

Так как уравнения (1) и (2) выражают одну и ту же зависимость между x и y, то графиком уравнения (1) является эта же прямая.

Для построения прямой достаточно найти какие-нибудь две точки. Например, из уравнения (2) находим: если $x=0$, то $y=1$; если $x=-1$, то $y=0$. Таким образом, графиком уравнения (1) является прямая, проходящая через точки $(0; 1)$ и $(-1; 0)$ (рис. 42).

(!) Можно показать, что графиком любого уравнения $ax+by=c$ является прямая, если хотя бы одно из чисел a или b не равно нулю.

В той же координатной плоскости, на которой построен график уравнения (1), построим график уравнения

$$2x+y=4. \qquad (3)$$

Из этого уравнения находим: если $x=0$, то $y=4$; если $y=0$, то $x=2$.

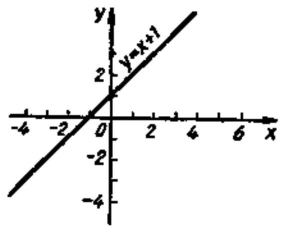


Рис. 42

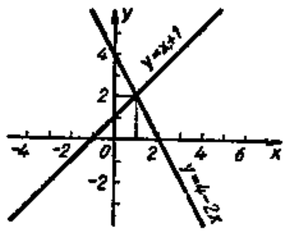


Рис. 43

Следовательно, графиком уравнения (3) является прямая, проходящая через точки $(0; 4)$ и $(2; 0)$ (рис. 43).

Найдем координаты точки пересечения построенных прямых, не используя графики. Так как координаты $(x; y)$ этой точки удовлетворяют уравнениям (1) и (3), т. е. обращают эти уравнения в верные числовые равенства, то пара чисел $(x; y)$ должна быть решением системы

$$\begin{cases} x-y=-1, \\ 2x+y=4. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x=1$, $y=2$.

Итак, прямые $x-y=-1$ и $2x+y=4$ пересекаются в точке $(1; 2)$.

Координаты точки пересечения прямых $x-y=-1$ и $2x+y=4$ можно было найти с помощью графика (рис. 43). В этом случае говорят, что система

$$\begin{cases} x-y=-1, \\ 2x+y=4 \end{cases}$$

решена графически.

Для этого нужно:

1) построить графики каждого из уравнений системы;

2) найти координаты точки пересечения построенных прямых (если они пересекаются).

Однако при графическом способе решения системы обычно получается приближенное решение. Решение системы уравнений дает точные значения координат точки пересечения.

З а д а ч а 1. Найти координаты точки пересечения прямых $7x-6y=0$ и $21x+2y=10$.

△ Решим систему $\begin{cases} 7x-6y=0, \\ 21x+2y=10. \end{cases}\Big|3$

$$+\begin{array}{l} 7x-6y=0 \\ 63x+6y=30 \end{array}$$

$$70x=30,\ x=\frac{3}{7}.$$

$$7\cdot\frac{3}{7}-6y=0,\ y=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\left(\frac{3}{7};\frac{1}{2}\right)$. ▲

На плоскости возможны три случая взаимного расположения двух прямых — графиков уравнений системы.

1) Прямые пересекаются, т. е. имеют одну общую точку. Тогда система уравнений имеет единственное решение (рис. 43).

2) Прямые параллельны, т. е. не имеют общих точек. Тогда система уравнений не имеет решений.

3) Прямые совпадают. Тогда система уравнений имеет бесконечное множество решений.

Приведем примеры к двум последним случаям.

Задача 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y=6, \\ 2x+4y=8. \end{cases} \qquad (4)$$

△ Умножим первое уравнение системы (4) на 2:

$$\begin{cases} 2x+4y=12, \\ 2x+4y=8. \end{cases}$$

Левые части уравнений этой системы равны при любых значениях x и y, а правые части не равны. Следовательно, нет таких значений x и y, которые обращают оба уравнения системы в верные равенства.

Ответ. Решений нет. ▲

Геометрически это означает, что графики уравнений системы (4) — параллельные прямые (рис. 44).

Задача 3. Показать, что прямые $x-2y=2$ и $3x-6y=6$ совпадают.

△ Так как уравнение $3x-6y=6$ получается из уравнения $x-2y=2$ умножением его обеих частей на 3, то эти уравнения выражают одну и ту же зависимость между x и y. Следовательно,

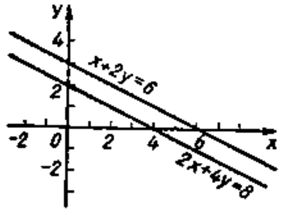


Рис. 44

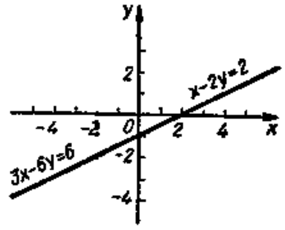


Рис. 45

графиками этих уравнений является одна и та же прямая (рис. 45). ▲

Это означает, что система

$$\begin{cases} x-2y=2, \\ 3x-6y=6 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений: координаты любой точки прямой $x-2y=2$ являются решением данной системы.

Упражнения

641. Найти координаты точек пересечения прямых с осями координат:

1) $x-y+5=0$; 2) $3x-y+3=0$;
3) $2x+y=1$; 4) $5x+2y=12$.

642. Построить график уравнения:

1) $y=3x+5$; 2) $3x+y=1$;
3) $2y+7x=-4$; 4) $4y-7x-12=0$;
5) $2y-6=0$; 6) $5x+10=0$.

643. Построить графики уравнений $y=2x+1$ и $x+y=1$. Найти координаты точки их пересечения. Проверить, обращают ли координаты точки пересечения графиков каждое из уравнений в верное равенство.

Решить графически систему уравнений (644—645).

644. 1) $\begin{cases} y=4x, \\ y-x=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=-3x, \\ y-x=-4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=2x, \\ x-y=-3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=3x, \\ 4x-y=3. \end{cases}$

645. 1) $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ 2x-y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x-y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+3y=6, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

646. Найти координаты точки пересечения прямых:

1) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+y=2, \\ x+2y=-6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ y-x=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x+3y=6, \\ 2x+y=4. \end{cases}$

---

647. Показать, что система уравнений не имеет решений:

1) $\begin{cases} y=3x, \\ 6x-2y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=6, \\ 2x=1-2y. \end{cases}$

648. Показать, что система уравнений имеет бесконечное множество решений:

1) $\begin{cases} x+y=0, \\ 2x+2y=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=3, \\ 2x-2y=6. \end{cases}$

649. Показать графически, что система уравнений имеет единственное решение:

1) $\begin{cases} 2x+3y=13, \\ 3x-y=13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=7, \\ x-2y=1. \end{cases}$

650*. Привести пример системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, решением которой являются координаты точки пересечения графика уравнения $4x+y=7$ с осью Ox.

651*. Привести пример системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, решением которой являются координаты точки пересечения графика уравнения $5x-7y=1$ с осью Ox.

652*. Составить линейное уравнение с двумя неизвестными, чтобы оно вместе с уравнением $-x-y=4$ образовало систему: 1) имеющую единственное решение; 2) имеющую бесконечное множество решений; 3) не имеющую решений.

§ 37. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Задача 1. Расстояние между двумя пристанями на реке равно 60 км. Это расстояние катер проходит по течению реки за 2 ч, а против течения за 3 ч. Найти собственную скорость движения катера и скорость реки.

△ 1) Введем обозначения:

x км/ч — скорость движения катера в стоячей воде;

y км/ч — скорость течения реки.

Тогда

$(x+y)$ км/ч — скорость катера при движении по течению реки;

$2(x+y)$ км — путь, который прошел катер по течению реки за 2 ч.

По условию задачи этот путь равен 60 км:

$$2(x+y)=60.$$

Далее, $(x-y)$ км/ч — скорость катера при движении против течения реки и

$3(x-y)$ км — путь, который прошел катер против течения реки за 3 ч.

По условию этот путь также равен 60 км:

$$3(x-y)=60.$$

Так как в полученных уравнениях x и y обозначают одни и те же числа, то эти уравнения образуют систему

$$\begin{cases} 2(x+y)=60, \\ 3(x-y)=60. \end{cases} \qquad (1)$$

2) Решим систему (1).

Упростим каждое из уравнений системы (1), поделив первое уравнение на 2, а второе — на 3:

$$\begin{cases} x+y=30, \\ x-y=20. \end{cases} \qquad (2)$$

Складывая эти уравнения, находим $2x=50$, $x=25$.

Вычитая из первого уравнения системы (2) второе уравнение, получаем $2y=10$, $y=5$.

3) Возвращаясь к условию задачи и использованным обозначениям, запишем ответ.

Ответ. Скорость движения катера 25 км/ч, скорость течения реки 5 км/ч. ▲

Задача 2. Найти два числа, если удвоенная сумма этих чисел на 5 больше их разности, а утроенная сумма этих чисел на 8 больше их разности.

△ 1) Составление системы уравнений.

Пусть x, y — искомые числа. Тогда по условию задачи имеем:

$$\begin{cases} 2(x+y)=(x-y)+5, \\ 3(x+y)=(x-y)+8. \end{cases} \qquad (3)$$

2) Решение системы.

Упростим уравнения системы (3):

$$\begin{cases} 2x+2y=x-y+5, \\ 3x+3y=x-y+8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y=5, \\ 2x+4y=8. \end{cases} \qquad (4)$$

Разделим обе части второго уравнения на 2 и вычтем полученное уравнение из первого:

$$\begin{array}{r} _{-}\,x+3y=5 \\ x+2y=4 \\ \hline y=1. \end{array}$$

Подставляя $y=1$ в первое уравнение системы (4), находим $x+3\cdot1=5$, $x=2$.

3) Так как x и y обозначают искомые числа, то можем записать ответ.

Ответ. Искомые числа 2 и 1. ▲

Обычно задачу с помощью системы уравнений решают по следующей схеме:

1) вводят обозначения неизвестных и составляют систему уравнений;

2) решают систему уравнений;

3) возвращаясь к условию задачи и использованным обозначениям, записывают ответ.

Иногда после решения системы приходится провести еще некоторые рассуждения или вычисления. Приведем пример такой задачи.

Задача 3. Два карандаша и три тетради стоят 12 к, а три карандаша и две тетради стоят 13 к. Сколько стоят пять карандашей и шесть тетрадей?

△ 1) Пусть x копеек — цена карандаша, y копеек — цена тетради. По условию задачи имеем:

$$\begin{cases} 2x+3y=12, \\ 3x+2y=13. \end{cases}$$

2) Вычтем из первого уравнения, умноженного на 3, второе, умноженное на 2:

$$\begin{array}{r} _{-}\,6x+9y=36 \\ 6x+4y=26 \\ \hline 5y=10, \end{array}$$

откуда $y=2$.

Подставляя $y=2$ в первое уравнение системы, находим $2x+3\cdot2=12$, $2x=6$, $x=3$.

3) Итак, $x=3$, $y=2$ — решение системы, т. е. карандаш стоит 3 к., тетрадь — 2 к., 5 карандашей и 6 тетрадей стоят

$$5\cdot3+6\cdot2=27 \text{ (к.)}.$$

Ответ. 27 к. ▲

Упражнения

653. Ученик за 3 общие тетради и 2 карандаша уплатил 66 к. Другой ученик за такие же 2 общие тетради и 2 карандаша уплатил 46 к. Сколько стоила общая тетрадь и сколько стоил карандаш?

654. Из 14 м ткани можно сшить 4 мужских и 2 детских пальто. Сколько метров ткани необходимо для пошива одного мужского и одного детского пальто, если из 15 м той же ткани можно сшить 2 мужских и 6 детских пальто?

655. Две бригады собрали вместе 1456 ц ржи. Первая бригада собрала рожь с 46 га, а вторая бригада — с 35 га. Сколько центнеров собрала в среднем с 1 га каждая бригада в отдельности, если первая собрала с 1 га на 7 ц ржи больше, чем вторая?

656. На платформу были погружены дубовые и сосновые бревна, всего 300 бревен. Известно, что все дубовые бревна весили на 1 т меньше, чем все сосновые. Определить, сколько было дубовых и сосновых бревен отдельно, если каждое бревно из дуба весит 46 кг, а каждое сосновое бревно — 28 кг?

657. Двое рабочих изготовили вместе 1020 деталей. Первый рабочий работал 15 дней, а второй — 14 дней. Сколько деталей изготовлял каждый рабочий за один день, если первый рабочий за 3 дня изготовлял на 60 деталей больше, чем второй за 2 дня?

658. Два тракториста заборонировали вместе 678 га пашни. Первый тракторист работал 8 дней, а второй — 11 дней. Сколь-

6 Зак. 290

ко гектаров бороновал за один день каждый тракторист, если первый за 3 дня заборонсвал на 22 га меньше, чем второй за 4 дня?

659. Для 8 лошадей и 15 коров отпускали ежедневно 162 кг сена. Сколько сена ежедневно выдавали каждой лошади и каждой корове, если известно, что 5 лошадей получили сена на 3 кг больше, чем 7 коров?

660. Два мастера получили за работу 234 р. Первый работал 15 дней, а второй — 14 дней. Сколько получал в день каждый из них, если известно, что первый мастер за 4 дня получил на 22 р. больше, чем второй за 3 дня?

---

661. В двух баках содержалось 140 *л* воды. Когда из первого бака взяли 26 *л* воды, а из второго — 60 *л*, то в первом баке осталось в 2 раза больше воды, чем во втором. Сколько литров воды было в каждом баке первоначально?

662. В одном бидоне на 5 *л* молока больше, чем в другом. Если из первого бидона перелить во второй 8 *л* молока, то во втором бидоне молока станет в 2 раза больше, чем останется в первом. Сколько литров молока в каждом бидоне?

663. Моторная лодка прошла путь по течению реки 12 км и обратно за 2,5 ч. В другой раз та же моторная лодка за 1 ч 20 мин прошла по течению реки 4 км, а против течения 8 км. Найти скорость моторной лодки в стоячей воде и скорость течения реки.

664. Из двух городов, расстояние между которыми 650 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Через 10 ч поезда встретились. Если же первый поезд отправится на 4 ч 20 мин раньше второго, то встреча произойдет через 8 ч после отправления второго поезда. Сколько километров в час проходит каждый поезд?

665. Колхоз собрал с двух участков 460 т клевера. На второй год на первом участке урожай увеличился на 15%, а на втором — на 10% и общий урожай клевера составил 516 т. Сколько тонн клевера было собрано с каждого участка в первый год?

666. В январе два цеха изготовили 1080 деталей. В феврале первый цех увеличил выпуск деталей на 15%, второй — на 12%, оба цеха изготовили 1224 детали. Сколько деталей изготовил в феврале каждый цех?

667*. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, на 54 больше данного числа. Найти это число.

668*. Сумма цифр двузначного числа равна 12, а разность числа единиц и числа десятков в этом числе в 12 раз меньше самого числа. Найти это число.

669.** В три сосуда налита вода. Если половину воды из первого сосуда перелить во второй, затем $\frac{1}{3}$ часть воды, оказавшейся во втором сосуде, перелить в третий и, наконец, $\frac{1}{4}$ часть воды, оказавшейся в третьем сосуде, перелить в первый, то в каждом сосуде станет по 6 *л*. Сколько воды было в каждом сосуде до переливания?

670.** Пристань *A* находится между пристанями *B* и *C*, причем пристань *B* находится ниже других по течению реки. Маршрут от *A* до *B* и от *B* до *C* теплоход проходит за 9 ч 20 мин, а маршрут от *C* до *B* и от *B* до *A* — за 9 ч. Скорость теплохода относительно воды равна 20 км/ч, а скорость течения реки равна 4 км/ч. Найти расстояние между пристанями *A* и *C*.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

Решить систему уравнений (671—673).

671. 1) $\begin{cases} 2x+y=2, \\ 6x-2y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+6y=4, \\ 2x-3y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+7y=2, \\ 5x+13y=12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x+y=3, \\ 9x+2y=4. \end{cases}$

6*

672. 1) $\begin{cases} 2(x+y)-3(x-y)=4, \\ 5(x+y)-7(x-y)=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5(3x+y)-8(x-6y)=20, \\ 6(x-10y)-13(x-y)=52. \end{cases}$

673. 1) $\begin{cases} 16x-27y=20, \\ 5x+18y=41{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 18x-21y=2, \\ 24x-15y=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-4y)=x-y, \\ \frac{x}{2}+y=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3(x-y)=6(y+1), \\ \frac{x}{3}-1\frac{1}{3}=y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x-y}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x-y}{4}, \\ \frac{x-y}{2}=4{,}5+\frac{y-1}{3}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{x+y}{5}-\frac{y-x}{2}=x+\frac{3}{20}, \\ \frac{x-y}{4}+\frac{x+y}{3}=y-7\frac{1}{24}. \end{cases}$

674. Показать, что система уравнений не имеет решений:

1) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 10x+5y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+8y=-1, \\ x+2\frac{2}{3}y=5. \end{cases}$

675. Показать, что система уравнений имеет бесконечное множество решений:

1) $\begin{cases} x=5-y, \\ y=5-x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y=13, \\ y=\frac{13-2x}{3}. \end{cases}$

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Проверить, является ли пара чисел $x=2$ и $y=1$ решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x-3y=1, \\ 5x+y=11. \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=2, \\ 3x+4y=5; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+4y=-1, \\ 2x-5y=7. \end{cases}$$

3. Масса яблок в пяти ящиках и груш в трех ящиках вместе составляет 70 кг. В одном ящике груш и двух ящиках яблок содержится 26 кг. Сколько килограммов яблок и сколько килограммов груш содержится в одном ящике?

676. Подобрать такие значения a и c, чтобы система уравнений $\begin{cases} x+y=5, \\ ax+3y=c \end{cases}$ имела:

1) единственное решение;
2) бесконечное множество решений;
3) не имела решений.

677. На 10 р. купили 8 кг груш первого сорта и 20 кг груш второго сорта. Сколько стоит 1 кг груш каждого сорта, если 5 кг груш первого сорта на 40 к. дороже, чем 7 кг груш второго сорта?

678. Отец старше дочери на 26 лет, а через 4 года будет старше ее в 3 раза. Сколько лет отцу и сколько дочери?

679. Турист выехал из города A и должен приехать в город B в назначенный срок. Если он будет ехать со скоростью 35 км/ч, то опоздает на 2 ч; если же он будет ехать со скоростью 50 км/ч, то приедет на час раньше срока. Определить расстояние между городами A и B и время, затраченное туристом на путь из города A в город B, если он прибыл в назначенный срок.

680*. Для детской музыкальной школы решили приобрести 4 баяна и 3 аккордеона на сумму 1470 р. Шефствующее предприятие оплатило 20% стоимости каждого аккордеона, и школе осталось заплатить 1101 р. Сколько денег заплатила школа за каждый баян и аккордеон?

681*. Две бригады лесорубов заготовили в декабре 900 кубометров дров. В январе первая бригада заготовила на 15%, а вторая — на 12% больше, чем в декабре, и поэтому обе бригады вместе заготовили за это время 1020 кубометров дров. Сколько кубометров дров заготовила каждая бригада в январе?

682*. Сад имеет форму прямоугольника. Если увеличить длину сада на 8 м, а ширину на 6 м, то площадь сада увеличится на 632 м². Если же длину сада уменьшить на 6 м, а ширину увеличить на 8 м, то площадь сада увеличится на 164 м². Определить длину и ширину сада.

683*. Если на странице книги уменьшить число строк на 4, а число букв в строке на 5, то число букв на всей странице уменьшится на 360. Если же на странице увеличить число строк на 3, а число букв в строке на 2, то на странице поместится на 228 букв больше, чем первоначально. Определить число строк на странице и число букв в строке книги.

684.** Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12}, \\ \frac{2}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{6}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{5}{y}=35, \\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=27; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{3}{x+y}+\frac{5}{x-y}=4, \\ \frac{1}{x+y}+\frac{15}{x-y}=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{10}{x+y}-\frac{4}{x-y}=3, \\ \frac{7}{x+y}-\frac{6}{x-y}=2. \end{cases}$

685.** Антикварный магазин, купив две старинные вазы на общую сумму 360 р., продал их, получив 25% прибыли. За сколько была продана каждая ваза, если наценка на первую вазу была 50%, а на вторую — 12,5%?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ VII КЛАССА

686. Найти значение числового выражения:

1) $(-1,5+4-2,5)(-6)$;

2) $(2-3-7+7,9)^2$;

3) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right):(-1,6-3,3+5)$;

4) $(2-5+7-1)^2:(-3)^2-21$;

5) $\dfrac{0,25-1\frac{1}{5}}{-3\frac{4}{5}+1,9}+\dfrac{10-2,5}{\frac{1}{2}-0,75}$; 6) $\frac{(0,2)^2+0,96}{4,5}+\frac{1}{9}$.

687. Сумма двух чисел равна 30. Одно из чисел a. Записать удвоенное произведение этих чисел. Вычислить значение этого произведения при $a=-2$.

688. Составить формулу, показывающую, сколько единиц содержится в натуральном числе, состоящем из a сотен, b десятков и c единиц. Сколько единиц в числе, написанном теми же цифрами, но в обратном порядке?

689. Сколько граммов содержат a килограммов и c граммов? Ответ записать формулой, обозначив число граммов буквой x.

690. Найти числовое значение алгебраического выражения:

1) $\frac{2a+b}{b-2a}$ при $a=-\frac{1}{2}$, $b=-3$; 2) $\frac{4a^2-1}{2a+1}$ при $a=\frac{1}{2}$.

Решить уравнение (691—694).

691. 1) $2(x-1)=3(2x-1)$; 2) $3(1-x)=4x-11$;
3) $3-5(x-1)=x-2$; 4) $3(x-2)-2(x-1)=17$.

692. 1) $\frac{2x+1}{3}=6$; 2) $\frac{x-7}{2}=\frac{1}{4}$;

3) $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{2}$; 4) $\frac{4}{3}x-1=\frac{x}{9}+\frac{1}{6}$.

693. 1) $7-\frac{x}{2}=3+\frac{7x}{2}$, 2) $9-\frac{2x}{3}=7+\frac{x}{3}$;

3) $\frac{x+3}{2}=x-4$; 4) $2-3x=\frac{x-12}{2}$.

694. 1) $\frac{6x+7}{7}+\frac{3+5x}{8}=3$; 2) $\frac{2x-4}{5}+\frac{2x-1}{3}=1$;

3) $5-\frac{2x-5}{3}=\frac{4x+2}{3}$; 4) $\frac{x-5}{5}=\frac{2x+1}{3}-7$.

695. В трех коробках находится 119 карандашей. В первой коробке на 4 карандаша больше, чем во второй, и на 3 карандаша меньше, чем в третьей. Сколько карандашей в каждой коробке?

696. Отцу 30 лет, а сыну 4 года. Через сколько лет отец будет втрое старше сына?

697. Катер прошел расстояние между двумя пристанями по течению реки за 3 ч, а против течения за 4 ч. Каково расстояние между этими пристанями, если скорость течения реки 2 км/ч?

698. Вертолет пролетел расстояние между двумя поселками при попутном ветре за 1,5 ч, а при встречном ветре за 2 ч. Каково расстояние между поселками, если скорость ветра была равна 10 км/ч?

699. Упростить:

1) $\frac{5^3 5^4 5}{(5^2)^3}$; 2) $\frac{7^7}{(7^2)^3}$; 3) $\frac{(b^3)^2 b^3 b}{(b^2)^4}-b^2$; 4) $\frac{(3b^2)^2 9b^3}{3^4 b^6}+b$;

5) $\left(\frac{1}{m}\right)^3\left(\frac{1}{m}\right)^2 m^5$; 6) $\left(\left(\frac{1}{a}\right)^4\right)^3-\left(\frac{1}{a}\right)^{11}\frac{1}{a}$.

700. Найти произведение одночленов:

1) $-12a^4bc^2d\cdot 5ac^3d^4\cdot(-3b^3cd^2)$;

2) $49a^2bc^2\cdot\left(-\frac{2}{7}ab\right)\cdot\left(\frac{1}{14}ac\right)$;

3) $\left(-\frac{2}{3}a^4b^2c\right)\cdot\frac{15}{2}abc^3$; 4) $\left(-\frac{4}{3}m^5n^3\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}mn^3\right)$.

701. Возвести одночлен в степень:

1) $(-2ab^2)^3$; 2) $(-0{,}8ac^2)^2$;

3) $\left(-\frac{3}{5}abc^3\right)^3$; 4) $\left(-\frac{1}{2}ab^2c^3\right)^4$.

702. Упростить выражение:

1) $2a^2+2ab+3b^2-a^2-2b^2$;

2) $a^2+ab+b^2+(2a^2+3ab-2b^2)+(a^2+ab+2b^2)$;

3) $7a^2+2b^2-(6a^2+b^2)$;

4) $4a^2+2a+1-(1+2a-4a^2)$.

703. Выполнить умножение многочлена на одночлен:

1) $(a^2-ab+b^2)\,3ab^3$; 2) $(2m^2-3mn+4n^2)\frac{1}{12}m^2n^2$;

3) $(6a^3-4ab^2+1)\frac{1}{2}ab$; 4) $(8m^3-7m^2n+1)\frac{1}{8}mn$.

704. Выполнить умножение многочленов:

1) $(a^2+3ab+b^2)(7a-5b)$; 2) $(3a^2-6ab^2+2b^2)(4ab-1)$;

3) $(a+3b-4c)(a-3b-4c)$; 4) $(m+n-2)(m-n+2)$;

5) $\left(\frac{1}{3}a^2b-\frac{2}{5}ab^2\right)(15a-30b)$;

6) $\left(\frac{1}{2}a^2+4a+1\right)(3a-1)$.

705. Найти значение выражения:

1) $12a^2b^3:(3ab^2)$ при $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{1}{9}$;

2) $(-49m^3n^4):(7mn^4)$ при $m=\frac{1}{7}$, $n=1$;

3) $(4a^3b+6a^2b):(2a^2b)$ при $a=-1$, $b=5$;

4) $(12a^4-24a^3+12a^2):(6a^2)$ при $a=\frac{1}{4}$.

Упростить (706—707).

706. 1) $(a+1)(a-1)(a^2+1)$;

2) $(1-2b)(1+2b)(1+4b^2)$;

3) $(2ab^2+3)(3-2ab^2)+4a^2b^4$;

4) $\left(\frac{a}{2}-5\right)\left(5+\frac{a}{2}\right)+25$.

707. 1) $(a+3)^2+(a-3)^2$; 2) $(4a+b)^2-(4a-b)^2$;

3) $\left(2-\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a^2}{b^2}$; 4) $(1-7b)^2-(1+7b)^2$.

708. Разложить на множители:

1) $a^4+6a^3+9a^2$; 2) $4+8b+4b^2$;

3) $(1-a)^2-4$; 4) $25-(2-3a)^2$.

709. Сократить дробь:

1) $\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}$; 2) $\frac{4-a^2}{a+2}$; 3) $\frac{4x^2-9}{2x^2+3x}$; 4) $\frac{3b^2-12b+12}{b^2-4}$.

Выполнить действия (710—714).

710. 1) $\frac{a-b}{ab}-\frac{a-c}{ac}$; 2) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab^2}+\frac{1}{a^2b}$;

3) $\frac{1}{14x^3}-\frac{1}{21x^2y}-\frac{1}{4xy^2}$; 4) $\frac{2}{3x^2y}+\frac{3}{5xy^2}-\frac{5}{4y^3}$.

711. 1) $1+a-\frac{a-1}{a}+\frac{a^2-1}{2a}-\frac{3a}{2}$; 2) $\frac{a^2-3b^2}{ab^2}+\frac{2}{ab}+\frac{ab+b^2}{a^2b^2}$;

3) $\frac{a^2+5a-4}{16-a^2}+\frac{2a}{8a+2a^2}$; 4) $\frac{b}{9}-\frac{4b}{6b-36}+\frac{2}{3}-\frac{4}{6-b}$.

712. 1) $\frac{a}{a^2-1}-\frac{1}{1-a^2}$;

2) $\frac{3y}{4x^2-9y^2}+\frac{2x}{9y^2-4x^2}$;

3) $1+3a+\frac{9a^2}{1+3a}+\frac{1}{3a-1}+\frac{6a}{1-9a^2}$;

4) $\frac{m^2}{m^3-n^3}-\frac{mn}{n^3-m^3}+\frac{n^2}{m^3-n^3}$.

713. 1) $\frac{x^2-y^2}{6xy}\cdot\frac{12x^2y}{x+y}$; 2) $\frac{8ab-8b^2}{a^2+ab}\cdot\frac{a^3-ab^2}{4b^3}$;

3) $\frac{a^2+4a}{a^2-16}:\frac{4a+16}{a^2-4a}$; 4) $\frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}:\frac{10ab}{3a^2-3b^2}$.

714. 1) $\frac{a^3+2a^2}{a^2-1}\cdot\frac{(a+1)^2(a-1)}{a^2(a+2)}$; 2) $\frac{1-81b^4}{a^2b^2-4}\cdot\frac{ab+2}{1-9b}$;

3) $\frac{(a^2+ab)^2}{a^2-b^2}:\frac{(a+b)^2}{(ab+b^2)^2}$; 4) $\frac{2cd+4d^2}{12c-6d}:\frac{4c^2-16d^2}{16c^2-4d^2}$.

Выполнить действия (715—716).

715. 1) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{a}{a+1}\right)$; 2) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{2a^2}{1-2a^2}\right)$;

3) $\frac{1-a^2}{1+b}\cdot\frac{1-b^2}{a+a^2}\cdot\left(1+\frac{a}{1-a}\right)$; 4) $\left(a+\frac{b-a}{1+ab}\right):\left(1-\frac{a(b-a)}{1+ab}\right)$.

716. 1) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}-\frac{4y^2}{x^2-y^2}\right)\cdot\frac{x+y}{2y}$;

2) $\left(\frac{1-b}{1+b}-\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+4b}{1-b^2}\right)\cdot(b^2+2b+1)$.

717. Тело движется равномерно со скоростью 4 км/ч.

1) Написать формулу, выражающую путь s этого тела за t часов.

2) Составить таблицу значений s при t, равном 0; 1; 2; 3; 4.

3) По данным таблицы построить график изменения пути данного тела в зависимости от изменения времени движения.

4) Найти по графику путь, пройденный телом за 1 ч 30 мин; за 3,5 ч.

5) Найти по графику, за какое время тело пройдет 10 км; 6 км.

6) Доказать, что отношение ординаты любой точки полученного графика к ее абсциссе равно 4.

718. Построить прямую:

1) $y=-3x+2$; 2) $y=3x-2$; 3) $y=\frac{1}{3}x+2$;

4) $y=-\frac{1}{3}x-2$; 5) $y=-2$; 6) $y=1$;

7) $x=-1$; 8) $x=3$.

719. Построить график функции $y=0{,}4x-8$. Найти по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному -1; 0; 1; 2,5;

2) при каком значении x значение y равно -8; -2; 0; 0,5; 1,5; 4.

720. Найти координаты точек пересечения прямой с осями координат:

1) $y=7x+4$; 2) $y=-7x+4$;

3) $y=3{,}5x-1$; 4) $y=-3{,}5x+1$.

721. Построить график уравнения:

1) $2y+3=0$; 2) $1-3x=0$; 3) $x+y-1=0$;

4) $2x+y=3$; 5) $3y-2x=9$; 6) $2x=y-1$.

722. Найти координаты точки пересечения прямых:

1) $y=4x-6$ и $y=3x-2$; 2) $y=3x-1$ и $y=-\frac{5}{3}x+\frac{8}{3}$.

Решить систему уравнений (723—724).

723. 1) $\begin{cases}2x-y=-6,\\x+2y=7;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-y-6=0,\\2x-3y+3=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+y=4,\\3x+y=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2x-y=4,\\3x+y+9=0;\end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x+7y=13, \\ 8x-3y=13; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-5y=6, \\ -8y=3x+7. \end{cases}$

724. 1) $\begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=5; \\ \frac{x}{4}-\frac{y}{5}=0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{2x}{3}-\frac{5y}{4}=-3, \\ \frac{5x}{6}-\frac{7y}{8}=-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+y=9, \\ \frac{x-y}{3}-x=-4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}=\frac{1}{3}, \\ x-y=\frac{1}{2}. \end{cases}$

725. Решить графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x+5y=1, \\ y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=2, \\ 2x+y=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+2y=1, \\ 5x-2y=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x-5y-7=0, \\ 2x-8y+2=0. \end{cases}$

726. В первом баке в 4 раза больше жидкости, чем во втором. Когда из первого бака перелили 10 л жидкости во второй, оказалось, что во втором баке стало в 1,5 раза больше жидкости, чем осталось в первом баке. Сколько жидкости было в каждом баке первоначально?

727. За две пары гольф и три пары носков уплатили 2 р. Сколько стоит пара гольф и пара носков, если 1 пара гольф и 4 пары носков стоят 1 р. 75 к.?

728. Если к числителю некоторой дроби прибавить 3, а знаменатель оставить без изменения, то получится 1; если к знаменателю исходной дроби прибавить 2, не меняя ее числитель, то получится дробь, равная $\frac{1}{2}$. Найти исходную дробь.

729. Теплоход прошел по реке расстояние между двумя пристанями, равное 80 км, за 3 ч 20 мин по течению реки и за 5 ч против течения. Найти скорость течения реки и собственную скорость теплохода.

---

730. Решить уравнение:

1) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}-\frac{3x-7}{6}=0;$

2) $\frac{2x-3}{2}-\frac{3-4x}{4}-\frac{3-5x}{8}=0;$

3) $\frac{x+4}{5}-\frac{x+3}{3}=x-5-\frac{x-2}{2};$

4) $\frac{5x}{6}-\frac{1-3x}{5}=x-\frac{x-7}{15}-1.$

731. Заводской цех должен был выполнить план по изготовлению однотипных деталей за 10 дней. Но уже за день до срока он не только выполнил задание, но и изготовил сверх плана 3 детали, так как ежедневно изготовлял сверх плана по 2 детали. Сколько деталей должен был изготовить заводской цех по плану?

732. Дана функция $y=kx+b$. При каких значениях k и b график функции проходит через точки $(-1;\ 1)$ и $(2;\ 3)$?

733. Найти значение k, если известно, что график функции $y=kx-1$ проходит через точку $(-3;\ 2)$.

734. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{9x-y}{7}+2y=3, \\ \frac{12x+5y}{3}-3x=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{11x+3y}{9}-3x=-5; \\ \frac{14x-9y}{11}+5y=8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x+5y}{2}+\frac{11x-2y}{8}=\frac{2x-4y+6}{5}, \\ \frac{2x-3y}{7}-\frac{y-2x}{5}=\frac{2(9x+7y)}{11}. \end{cases}$

735. За 5 м шерсти с лавсаном и 4 м шелка в магазине «Ткани» нужно заплатить 50 р. При передаче остатков ткани в магазин по продаже мерного лоскута цену на шерсть с лавсаном снизили на 25%, а на шелк — на 15%, и в этом магазине за 6 м шерсти с лавсаном и 5 м шелка нужно заплатить 48 р. 25 к. Сколько стоит метр шерсти с лавсаном и метр шелка в магазине «Ткани»?

736. Сестра старше брата на 6 лет, а через год будет старше его в 2 раза. Сколько лет каждому из них?

737. Поезд прошел расстояние 63 км между двумя станциями за 1 ч 15 мин. Часть пути он шел под уклон со скоростью 42 км/ч, а остальную горизонтальную часть пути поезд шел со скоростью 56 км/ч. Сколько километров пути уложено под уклон?

738. Дано выражение $(x^2-9)^2-(x+3)^2$.

1) Разложить данное выражение на множители.

2) При каких значениях x значение данного выражения равно нулю?

3) Записать данное выражение в виде многочлена стандартного вида.

4) Найти числовое значение данного выражения при $x = -3$, $x = 3$.

5) Сократить дробь $\frac{(x^2-9)^2-(x+3)^2}{(x+3)^2}$.

739. 1) Разложить на множители каждое из выражений:

$A = (2x-3)^2-(x+2)^2$, $\quad B = (2x^2-2x)-10x+10$.

2) При каких значениях x значение каждого выражения равно нулю?

3) Упростить дробь $\frac{A}{B}$. Вычислить значение этой дроби при $x = -\frac{1}{3}$, $x = -1$.

4) При каких значениях x значение этой дроби равно нулю?

740. 1) При каких значениях k и b график функции $y = kx+b$ проходит через точки $(-1;\ 1)$, $(2;\ -3)$?

2) Проходит ли график функции $y = -2x-1$ через точки $(-3;\ 5)$, $(-1;\ 2)$?

3) Построить график функции $y = -2x-1$. Найти координаты точек пересечения графика с осями координат.

4) При каком значении x значение функции $y = -2x-1$ равно нулю?

5) Указать несколько целых значений x, при которых значения функции $y = -2x-1$ положительны (отрицательны).

6) Найти координаты точки пересечения графика функции $y = -2x-1$ с графиком функции $y = 5$.

741. Команда рыболовецкого сейнера по плану должна была вылавливать 60 ц рыбы ежедневно. Перевыполняя план ежедневно на 5 ц, команда выполнила плановое задание на 3 дня ранее срока и, кроме того, выловила 20 ц рыбы сверх плана. Сколько рыбы должна была выловить команда сейнера по плану?

742. За 5 дней работы трактористы засеяли 500 га. Во 2-й день они засеяли на 25% больше, чем в 1-й, а в 3-й — на 20% больше, чем во 2-й. Последние два дня они засевали каждый день столько же, сколько во 2-й день. Сколько гектаров засеяли трактористы в 1-й день?

Упростить (743—744).

743. 1) $(1-a)(1+a+a^2)+a^3$;

2) $(b+3)(b^2-3b+9)-27$;

3) $\left(\frac{1}{2}-c^2\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}c^2+c^4\right)+c^6$;

4) $\left(2a^2+\frac{1}{3}\right)\left(4a^4-\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{27}$.

744. 1) $(2a-b)^2-(2a-b)(2a+b)$;

2) $(1-a)^2(1+a)^2-(1-a^4)$;

3) $(2a+b)^2-9(a+b)^2$;

4) $(a-2b)^2-25(3a-b)^2$.

Разложить на множители (745—746).

745*. 1) $a^3b^6c^3-1$; 2) $8a^3b^3+125c^3$;

3) $(a-1)^2+2(a-1)+1$; 4) $(4a-1)^2+2(4a-1)+1$.

746*. 1) $4ab^2+15abc-4bcd-15c^2d$; 2) m^3-m^2+m-1;

3) $a^2+b^2-c^2+2ab$; 4) $1+2ab-a^2-b^2$;

5) $(a+3)^2-6(a+3)+9$;

6) $(m-1)(m^2-7m)+(m-1)(5m+1)$.

747*. Выполнить действия:

1) $\left(m^2+\frac{1}{m^2}+2\right):\left(m+\frac{1}{m}\right)-\frac{m^3}{m^2-1}$;

2) $\frac{x^2+y^2}{x}:\left(x^3+\frac{y^4}{x}+2xy^2\right)-\frac{1}{x^2y^2}$;

3) $\left(\frac{9m^2-3n^2}{4mn}-\frac{m-4n}{5n}\right):\left(\frac{2m+n}{3m}-\frac{5n^2-3m^2}{16m^2}\right)$;

4) $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$;

5) $\left(\frac{a+4b}{2b}-\frac{6b}{4b-a}\right)\cdot\left(1-\frac{a^2-2ab+4b^2}{a^2-4b^2}\right)$;

6) $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2-\left(\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)^2$.

748*. Разложить на множители:

1) a^2-2a-3; 2) $b^2-7b+12$; 3) a^3+a^2-12;

4) x^3-7x+6; 5) $m^2-7m+10$; 6) m^2-m-2.

749*. Выполнить действия:

1) $\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)$;

2) $\left(\frac{2q}{p+2q}-\frac{4q^2}{p^2+4pq+4q^2}\right):\left(\frac{2q}{p^2-4q^2}+\frac{1}{2q-p}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{1-a}-1\right):\left(a+\frac{1-2a^2}{1-a}-1\right)$;

4) $\left(\frac{p}{p^2-4}+\frac{2}{2-p}+\frac{1}{p+2}\right):\left(p-2+\frac{10-p^2}{p+2}\right)$.

750*. Определить значение b, если через точку с координатами (3; 10) проходит график функции, заданной формулой:

1) $y=x+b$; 2) $y=3x+b$;

3) $y=-\frac{1}{3}x+b$; 4) $y=-\frac{1}{2}x+b$.

751*. Задать формулой функцию, графиком которой является прямая, проходящая через точки A и B:

1) $A(-6;\ -3)$, $B(2;\ -3)$; 2) $A(-4;\ -4)$, $B(3;\ 3)$;

3) $A(2;\ 2)$, $B(0;\ 4)$; 4) $A(3;\ -8)$, $B(-5;\ 32)$.

752.** Путь от колхоза до города идет сначала горизонтально, а затем в гору. Колхозник проехал на велосипеде горизонтальную часть пути со скоростью 10 км/ч, а в гору шел пешком со скоростью 3 км/ч и прибыл в город через 1 ч 40 мин после выезда из колхоза. Обратно он проехал путь под гору со скоростью 15 км/ч, а горизонтальную часть пути со скоростью 12 км/ч и прибыл в колхоз через 58 мин после выезда из города. Сколько километров от колхоза до города?

753.** Велосипедист прибыл из пункта A в пункт B в назначенное время, двигаясь с определенной скоростью. Если бы он увеличил эту скорость на 3 км/ч, то прибыл бы к месту назначения на час раньше срока, а если бы он проезжал в час на 2 км меньше, чем в действительности, то он опоздал бы на час. Определить расстояние между пунктами A и B, скорость велосипедиста и время его движения.

754.** Для содержания лошадей был сделан запас сена на некоторое время. Если бы лошадей было на две меньше, то этого запаса сена хватило бы еще на 10 дней; если бы лошадей было на две больше, то запаса сена не хватило бы

на 6 дней. Сколько было лошадей и на сколько дней был сделан запас сена?

755.** Первая труба наполняет бассейн за половину того времени, за которое вторая труба наполняет $\frac{2}{3}$ этого бассейна. Вторая труба отдельно наполняет бассейн на 6 ч дольше, чем одна первая труба. Сколько времени наполняет бассейн каждая труба отдельно?

Старинные задачи

Задача Диофанта (III в., древнегреческий математик, автор трактата «Арифметика», в котором изложены и начала алгебры. Сочинения Диофанта послужили основой для исследований в теории чисел и уравнений).

756. Ослица и мул шли бок о бок с тяжелой поклажей на спине. Ослица жаловалась на свою непомерно тяжелую ношу. «Чего ты жалуешься? — ответил ей мул.— Ведь если я возьму у тебя один мешок, ноша моя станет вдвое тяжелей твоей. А вот если бы ты сняла с моей спины один мешок, твоя поклажа стала бы одинакова с моей». Сколько мешков несла ослица и сколько нес мул?

Индийские задачи

757. Два лица имеют равные капиталы, причем каждый капитал состоит из известного числа вещей одинаковой ценности и известного числа монет. Как число вещей, так и суммы денег у каждого различны. Какова ценность вещи?

758. Над озером тихим, с полфута размером,
Высится лотоса цвет.
Он рос одиноко. И ветер порывом
Отнес его в сторону. Нет
Больше цветка над водой.
Нашел же рыбак его ранней весной
В двух футах от места, где рос.
Итак, предложу я вопрос:
Как озера вода здесь глубока?

Задача Авиценны (980—1037 гг., среднеазиатский философ-естествоиспытатель, врач, математик, поэт).

759. Если число, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, дает в остатке 1.

Задача из «Азбуки» Л. Н. Толстого (1828—1910 гг., великий русский писатель, педагог, почетный член Петербургской академии наук).

760. Пять братьев разделили после отца наследство поровну. В наследстве было три дома. Три дома нельзя было делить, их взяли старшие три брата. А меньшим за то выделили деньги. Каждый из старших заплатил по 800 рублей меньшим. Меньшие разделили эти деньги между собой, и тогда у всех пяти братьев стало поровну. Много ли стоили дома?

Старинные русские задачи

761. Мне теперь вдвое больше лет, чем было вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам теперь; а когда вам будет столько лет, сколько мне теперь, то нам будет обоим вместе 63 года. Сколько лет каждому?

762. У отца спросили, сколько лет его двум сыновьям. Отец ответил, что если к произведению чисел, означающих их года, прибавить сумму этих чисел, то будет 14. Сколько лет сыновьям?

763. Крестьянин менял зайцев на кур: брал за всяких двух зайцев по три курицы. Каждая курица снесла яйца — третью часть от числа всех куриц. Крестьянин, продавая яйца, брал за каждые 9 яиц по столько копеек, сколько каждая курица снесла яиц, и выручил 72 копейки.
Сколько было кур и сколько зайцев?

ОТВЕТЫ

2. 2) $2\cdot\frac{1}{3}\cdot 2{,}7$. 3. 2) $40\cdot 0{,}03=6:5$; 4) $3\cdot(2+6)=2\cdot(2\cdot 6)$. 4. 61 р. 30 к. 5. 2) 10,7; 4) 14,85. 6. 2) $\frac{9}{56}$; 4) $4\frac{6}{7}$; 6) 0,03. 7. 2) $-0{,}02$; 4) 3. 8. 2) Верно; 4) верно. 10. Не успеют. 11. 2) $\frac{1}{2}(c-d)$; 4) $\frac{n+m}{17}$. 12. 2) 0; $-12{,}1$; 4) 5; $-0{,}675$. 13. 2) $60m$; 4) $60n+l+\frac{p}{60}$. 14. 2) 2. 15. 2) $0{,}33\cdot\frac{x}{0{,}27}$. 16. 2) $-0{,}1$; $\frac{9}{40}$. 17. 2) Не может; 4) не может. 18. $b=2$, $c=0$, или $b=5$, $c=0$, или $b=8$, $c=0$. 19. $p=6x+3y$. 20. $m=15a+20b$. 21. $m=al+cn$. 22. 810. 23. $45a+15b+10c$. 24. 2) $b\neq 0$; 4) $a\neq b$. 25. 2) Неверно. 26. $s=3\frac{1}{6}c+1\frac{2}{3}a+2\frac{1}{2}b$, 53 км. 27. $\frac{s}{t-1}$ км/ч. 28. 2) Верно. 29. 1) $R=\frac{C}{2\pi}$; 2) $\rho=\frac{m}{V}$, $m=V\rho$; 3) $l=s-vt$, $v=\frac{s-l}{t}$, $t=\frac{s-l}{v}$. 30. $2{,}6a+5$. 31. $(7+3{,}5a)$ км. 32. 2) 40; 4) -41. 33. 2) $3y-2x$; 4) $8{,}7-2\frac{1}{3}m+1\frac{2}{3}n$. 34. 2) $3-2{,}7b$; 4) $\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}b-3$; 6) 5 р. 35. 2) $x+5$; 4) $58c+14d$. 36. 2) 67,048; 4) $-11{,}221$. 37. 2) 0,28; 4) $7\frac{37}{112}$. 38. 2) $1{,}4x-2y$; 4) $-1\frac{2}{3}n$; 6) $-11c-4d$. 40. 2) 4; 4) 2. 41. Второй. 42. 2) $4\frac{13}{18}$; 4) $8\frac{5}{9}$. 43. 2) $a-2b+3c$; 4) $-a+2b-3c$. 44. 2) $a-b+c-d$; 4) $a-b-c+d-k$. 45. 2) $8x-2y$; 4) $3a-2$. 46. 2) $a-2b+(m+c)$; 4) $a+(-m+3b^2-2a^2)$. 47. 2) $2a+b-(-m-3c)$; 4) $a-(m-3b^2+2a^2)$. 48. 2) $4a-4b$; 4) $5x-3y$. 49. 2) $-1{,}16$; 4) -3. 52. 1) $101a+20b+101c$; 2) $99a-99c$. 53. 2) $10\frac{7}{18}$. 54. 2) $2mn$; 4) $(a+b)(a-b)$. 55. 1 ч 40 мин; 50 ч. 56. 2) 5000; 100. 57. 37 440 м²; 187 200 м³; 37 440m м³. 58. 2) -7. 59. 3 р. 48 к. 61. 2) $-1\frac{2}{3}$. 62. $4a+8$ и $(a-4)(a+8)$. 63. 1479 р. 64. 2) $(m-1)m$; 4) $(2p+1)(2p+3)(2p+5)$. 65. $s=3+40t$, $t=\frac{s-3}{40}$. 66. 23,8 м и 38 м. 67. $s=6v+15$, $v=\frac{s-15}{6}$. 68. 2) Верно. 70. $t=\frac{s-3}{v}$;

не успеет. 71. 4 и 3 или 9 и 1. 72. $n=50$, $m=42$. 74. 2) $56=14x$; 4) $\frac{x+5}{2}=5x$. 75. 2) 3; 4) никакое. 77. 2) Нет; 4) -1. 79. 2) $a=-5$; 4) $a=-2,4$. 80. 2) Нет; $a=3$. 81. 2) $x=60$. 82. 1) $x_1=0$, $x_2=2$; 2) $x_1=0$, $x_2=1$; 3) $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=4$; 4) $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_3=1$. 83. 1) $x=0$; 2) $x_1=2$, $x_2=-2$; 3) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-\frac{1}{3}$; 4) $x_1=3$, $x_2=-1$. 86. 2) $x=-\frac{5}{7}$; 4) $x=\frac{2}{3}$. 87. 2) $x=-1,3$; 4) $x=-0,05$. 88. 2) $x=\frac{3}{7}$; 4) $x=\frac{1}{3}$. 89. 2) $x=17$; 4) $y=-1$. 90. 2) $y=0$; 4) $x=0,8$. 91. 2) $x=7,5$; 4) $y=24$. 92. 2) $y=13$; 4) $x=1$. 93. 2) $x=13$; 4) $x=-153$. 94. 2) $x=37$; 4) $x=1,1$. 97. 2) $x=8$; 4) $x=-\frac{7}{23}$. 98. 2) $x=1,4$; 4) $x=0,108$. 99. 2) $x=\frac{a-4}{b}$; 4) $x=\frac{a-3}{b}$; 6) $x=\frac{1-a}{b}$. 100. 1) $x_{1,2}=\pm 2,5$; 2) $x_{1,2}=\pm 3$; 3) $x_{1,2}=\pm 0,24$; 4) $x_{1,2}=\pm 0,23$; 5) $x_{1,2}=\pm 0,7$; 6) $x_{1,2}=\pm 0,01$. 101. 3. 102. 1) 16; 20; 32; 2) 144; 432; 293. 103. 2; 12; 84. 104. 25; 27; 29. 105. 6; 8; 10; 12. 106. 1) 48 м²; 2) 12 деталей в час. 107. 1) 6 лет; 2) 8 лет. 108. 1) 22 и 66 кг; 2) 2200 и 1100 т. 109. 1) 72 детали; 2) 150 машин. 110. 1) 9 км/ч; 2) 8 км/ч. 111. 1) 1 м/с; 2) 37,8 км. 112. 1) 8,5 км; 2) через 4 ч. 113. 1) 300 и 450 р.; 2) 100 и 150 деталей. 114. 1) 20 км; 5 ч 15 мин; 2) 200 км; 3,5 ч. 115. 1) 75 км/ч, 80 км/ч или 90 км/ч, 95 км/ч; 2) 30 км/ч, 40 км/ч или $36\frac{2}{3}$ км/ч, $46\frac{2}{3}$ км/ч. 116. 2) $z=6$; 4) $x=0,6$. 117. 2) $x=4$; 4) $x=-2$. 118. 1) 15 дней; 2) 32 дня. 119. 1) 1518 кг; 2) 108 км. 120. 83,6 кг; 508,8 кг; 1327 кг. 121. $x=2,2$. 122. $x=7$. 123. 2) $a=2$; 4) $a=75$. 124. 2) $a=0$. 125. 1) $x=2a-3$, a — любое; 2) $x=\frac{a+6}{5}$, a — любое; 3) $x=\frac{7}{3a}$, $a\neq 0$; 4) $x=\frac{3}{a}$, $a\neq 0$; 5) $x=\frac{8}{a-3}$, $a\neq 3$; 6) $x=\frac{1}{a+2}$, $a\neq -2$. 126. 21 км. 127. 4 км. 128. 100 кг. 129. 5 кг. 130. 1) $x=13,4$; 2) $x=1,65$. 131. 1) $x_1=2$, $x_2=-1$; 2) $x_1=\frac{3}{5}$, $x_2=-\frac{1}{5}$; 3) $x=-1$; 4) $x=0$. 132. 50 км/ч. 133. 2) $\frac{1}{4}$ м²; 4) 7,29 дм². 134. 2) 27 дм³; 4) 0,064 м³. 135. 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 4) m^3; 6) $\left(\frac{m}{n}\right)^5$. 136. 2) $6^2\times 7^2\cdot 3^2$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot(2,3)^2$. 137. 2) $x^4\cdot 3^2$; 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^2(8a-b)^2$. 138. 2) $5^{16}b^{21}$; 4) $6^{14}a^8$. 139. 2) a^2+b^4; 4) $2x^3$. 140. 2) $(-1,25)\cdot(-1,25)\cdot(-1,25)\cdot(-1,25)$; 4) $(a+b)\times(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$. 141. 2) 9; 4) 125. 142. 2) -1; 4) 0. 143. 2) -125; 4) $-5\frac{1}{16}$. 144. 2) $\frac{9}{25}$; 4) $12\frac{19}{27}$. 145. 2) 40; 4) -6. 146. 2) 164; 4) 23. 147. 2) $5\cdot 10^6+4\cdot 10^4+3\cdot 10^3+2\cdot 10^2+1$; 4) $1\cdot 10^7+2\cdot 10^6+3\cdot 10^5+5\cdot 10^4+1\cdot 10^2+7$. 148. 2) 3 532 037; 4) 101 001. 149. 2) Делится на 5, не делится на 3; 4) да. 150. 2) $7,81\cdot 10^2$; 4) $8,0005\cdot 10^4$; 6) $1,2748\cdot 10^2$. 151. $S=6k^2$, $V=k^3$. 152. 2) a^3; 4) c^2+3^2. 153. 2) $2^3<3^2$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3>\left(\frac{1}{3}\right)^3$. 154. 2) Нет; 4) нет. 155. 2) $3,08\cdot 10^{13}$. 156. $5,1\cdot 10^8$; 10^{13}. 157. 10 кг. 158. 2) $(-7)^2$; $(-0,4)^2$; $\left(\frac{1}{7}\right)^2$; $(-1,5)^2$. 159. 2) 1; 4) 0. 160. 2) a^7; 4) $(3b)^6$. 161. 2) 3^{10}; 4) $(-6)^{12}$. 162. 2) $\left(-\frac{5x}{6}\right)^{12}$; 4) $(n+m)^{20}$. 163. 2) 2^7; 4) 2^4; 6) 2^{11}. 164. 2) 2^2; 4) 2^3; 6) 2^9. 165. 2) 3^3; 4) 3^8; 6) 3^6. 166. 2) 3^1; 4) 3^2; 6) 3^4. 167. 2) $\left(\frac{1}{17}\right)^2$; 4) a^{12}. 168. 2) $(2a)^2$; 4) $4(m+n)^3$. 169. 2) 6; 4) 25. 170. 2) 44; 4) 9. 171. 2) $x=64$; 4) $x=27$; 6) $x=16$. 172. 2) a^{50}; 4) a^{11}; 6) a^{16}. 173. 2) a^2; 4) a^{12}. 174. 2) $\frac{1}{16}$; 100. 175. 2) $(2^4)^3$; 4) $(2^{10})^2$. 176. 2) $\left(\frac{5}{6}\right)^3$; 4) $(0,02)^2$. 177. 2) $(b^3)^2$; 4) $(x^{10})^2$. 178. 2) $7^8\cdot 6^8$; 4) $4^3\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3$. 179. 2) 6^6y^6; 4) $3^3n^3m^3$. 180. 2) a^6b^3; 4) $(0,1)^3c^9$. 181. 2) $8^3a^{12}b^{21}$; 4) $(-2)^4n^4m^{12}$. 184. 2) $(2a)^3$; 4) $(2\cdot 3)^3$; 6) $(9k)^2$; 8) $(15ab)^3$. 185. 2) $(a^2b^3)^2$; 4) $(9m)^2$. 186. 2) $(xy^2z^4)^2$; 4) $(10c^4x^3)^2$. 187. 2) 1; 4) -1. 188. 2) 144; 4) 14. 189. 2) 14; 4) 16. 190. 2) $\frac{25}{49}$; 4) $\frac{b^3}{512}$. 191. 2) $\frac{81b^4}{625c^4}$; 4) $\frac{5^6}{7^{12}}$. 192. 2) $\frac{49}{(2+c)^2}$; 4) $\frac{(a+b)^7}{(a-b)^7}$. 193. 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; 4) $\left(\frac{5}{a}\right)^7$. 194. 2) $\left(\frac{4x}{3y}\right)^4$. 4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$. 195. 2) 3^{8+n}; 4) a^{n+12}. 196. 2) b^{n+k}; 4) 3^{2n+3m}. 197. 2) 2^n; 4) 2^{3n+3}. 198. 2) 3^{4n}; 4) 3^4. 199. 2) 7; 4) 2. 200. 2) 1; 4) 4. 201. 2) $\frac{2}{5}$; 4) $2\frac{1}{3}$. 202. 2) 0,000064; 15 625; $\frac{729}{64}$; $\frac{1\,000\,000}{729}$. 203. 2) ≈ 9 лет. 204. 2) 19 531 251; 4) 3,71293. 205. 1) $21^{12}>54^6$; 2) $10^{20}>20^{10}$; 3) $100^{20}>9000^{10}$; 4) $3^{40}>6^{20}$. 206. 1) 5; 2) 4; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{7}$. 207. 2) $3a^2b$; 4) $100n$. 208. 2) 1. 210. 2) z^{11}; 4) m^4; 6) $72p^3q^2$; 8) $-\frac{4}{33}x^2y^3$. 211. 2) 2. 212. 1) $\approx 235,6$; 2) $\approx 5,31$; 3) $\approx 19,5$; 4) $\approx 21,4$. 213. 2) $35m^2n$; 4) $-4b^5$. 214. 2) $-21a^5b^5c^2$; 4) $-\frac{9}{8}a^4x^3y^4$. 215. 2) $-15n^2m^3$; 4) $-26a^4b^4c^5$. 216. 2) $25b^2$; 4) $4a^6$. 217. 2) $-a^{10}b^5c^5$; 4) $16x^8y^{12}$. 218. 2) $\frac{1}{81}n^8m^8$; 4) $0,16a^6b^4$. 219. 2) $-2a^4$; 4) $a^2b^4c^2y^5$. 220. 2) x^3y^5; 4) $-4a^{10}b^{11}$. 221. 2) 204,8. 222. 2) $6xy$. 223. 2) a^2b^2. 224. 2) $(4x^3)^2$; 4) $(9x^2y)^2$; 6) $(1,1a^4b^2)^2$. 225. 2) $(2b^2)^3$; 4) $(2a^2b^2)^3$; 6) $(-0,3xy^2)^3$. 226. 2) $n=3$; 4) $n=3$. 227. 2) $2x^2-11x+3$; 4) a^3-a^4+a; 6) $4a^3b-2a^2b^2-5ab^3$. 228. 2) $8a^2b^3-24a^4b-2a^2b^4$; 4) $-bc^3+5x^2y^3$. 229. 2) 0. 230. 2) $-7,6$; 4) -252. 231. $x=\frac{1}{8}$. 232. 2) Да. 233. 2) Да. 234. 800 кг, 160 кг, 450 кг. 235. 2) $\frac{13}{16}a^2b$. 236. 2) $2a+b$; 4) $2a^2-3b^2$. 237. 2) $-y$; 4) $3,8a^2$. 238. 2) a^2; 4) $2xy-2,2y^2$. 239. 2) $x^3-x^2y-6xy^2$. 240. 2) xy; 4) $10\ mn^2k$. 241. 2) $13\frac{3}{4}$. 242. 2) $x=0,93$. 243. 1) 340; 40 и 20 кг; 2) 1:500. 244. 2) $3x+3y$; 4) $3x+1$. 245. 2) $0,1c^2$; 4) $6a+22b$. 246. 2) $6b^2-6ab-2a^2$; 4) $3x^3$. 247. 2) $-0,07x^2+0,06y^2$; $0,27x^2-0,1y^2$; $1,39a^3-0,88b^3$. 248. 2) $3b-5b^2$. 249. 2) q^3; 4) $-5ab+8b^2$. 250. 2) $x=-1$; 4) $x=-\frac{27}{34}$. 252. 2) $3a^2$. 253. 62. 254. 93. 255. 2) $-\frac{1}{3}m+\frac{1}{3}n-\frac{1}{3}p$; 4) $-15x^3-35x^2+5x$. 256. 2) $75a^2b^2+15a^2b$; 4) $3x^2y^3-6x^4y^3$. 257. 2) $16ab^2-24a^2bc+8abc^2$; 4) $x^3yz+2xy^3z+3xyz^3$. 258. 2) $7b-3a$; 4) $-14p-9$.

259. 2) $6b^2-a^2b$. **260.** 2) 5; 4) 204. **261.** 2) $x=-3\frac{1}{3}$; 4) $x=-\frac{7}{36}$. **262.** 2) $x=1$. **263.** 20, 20 и 16 км. **264.** 2) z^2+3z-4; 4) $bc+5b+4c+20$. **265.** 2) $-a^2+8a+20$; 4) $p+pq-q-q^2$. **266.** 2) $30x^4-61x^2y^2+30y^4$; 4) x^3+5x^2+7x+3. **267.** 2) $27a^3-8b^3$; 4) $27a^3+8b^3$. **268.** 2) $a^3+3a^2b-ab^2-3b^3$; 4) $12x^3-29x^2+7x+6$. **269.** 2) 24; 4) 12,08. **271.** 2) $12\frac{2}{3}$. **272.** 2) $x=a-9$; 4) $x=4-a$. **275.** 76 м². **276.** 221 см². **278.** 2) y^4; 4) 1. **279.** 2) $9m$; 4) $\frac{4}{5}b$. **280.** 2) 8; 4) 7. **281.** 2) 3; 4) -3. **282.** 2) $-\frac{5}{3}y$; 4) $0,4c$. **283.** 2) $7m^6$; 4) $1\frac{1}{6}$. **284.** 2) $\frac{9}{4}ab^2$; 4) $3ab$. **285.** 2) $81x^4y$; 4) $x^7y^{11}z^2$. **286.** 2) $2b-1$; 4) $2-x$. **287.** 2) $4a-3b$; 4) $1-c$. **288.** 2) $-\frac{2}{3}cd-1$; 4) $-\frac{1}{4}ab+\frac{3}{4}a^2$. **289.** 2) $4-2x-3y$; 4) $a+3a^2b-2$. **290.** 2) 1; 3) $-8y$; 4) $-3a$. **291.** 2) -3. **292.** 2) $x=-2,2$; 4) $x=9$. **293.** 2) $1024a^{12}b^{34}$. **294.** 2) 270; 4) 4. **295.** 2) 8; 4) 128. **296.** 2) $\frac{1}{35}$; 4) $1\frac{7}{9}$. **297.** Верно. **298.** 2) $(-10b^3)^2$; 4) $(-0,2xy^3)^3$. **299.** 2) $-7,5n^3m^7k^7$; 4) $-7,5a^8b^7c^7$. **300.** 2) $-2b$; 4) $8x^3$. **301.** 2) $a^3b^7+\frac{3}{4}a^4b^4$; 4) $5b^{10}y^8-4,5b^7y^7+22,5b^3y^{10}$. **302.** 2) $0,09-m^2$; 4) $0,04a^2-0,25x^2$. **303.** 2) $-20b^2+17bc-16by-3c^2+4cy$; 4) $9a^2-24ab+15b^2+12ac-20bc$. **304.** 2) $9x^3$; 4) $-9x^2-3x$. **305.** 2) $x=0,36$. **306.** 125%. **307.** $\frac{1}{400}$. **308.** 2) x^{5a+9}; 4) 3^{5n+2}. **309.** 2) $n=7$; 4) $n=5$. **310.** 28 учеников. **311.** $5\frac{1}{7}$ ч. **312.** $k+2m-n$. **313.** 2) $x=0,01$. **314.** 1) 330; 2) 315. **317.** 1061,21; 1104,08; 1218,99. **318.** 2) 177,45. **319.** 2) $3(a-x)$; 4) $6(a+2)$. **320.** 2) $7(3a-b+6)$; 4) $3(3x-y+5z)$. **321.** 2) $c(d+b)$; 4) $x(1-y)$. **322.** 2) $3b(d-1)$; 4) $3p(2k-1)$. **323.** 2) $a^2(a-3)$; 4) $x^2y^2(y-x)$. **324.** 2) $4x^2y(5xy+1)$. **325.** 2) $2x^2y^2(y^2-x^2+3xy)$. **326.** 2) $x(y-x+z)$; 4) $4b(b+2a-3a^2)$. **327.** 2) 18 700; 4) $-1,62$. **328.** 2) $(a+5)(b-c)$; 4) $(y-3)(1+b)$. **329.** 2) $(m-3)(3n+5m)$; 4) $(c-d)(7a-2b)$. **330.** 2) $(x+y)(a^2+b^2)$; 4) $(a^2+2b^2)(x+y)$. **331.** 2) $(b-c)(a+c)$; 4) $(x-y)(2b+1)$. **332.** 2) $(a-2)(6-a)$; 4) $(m-2)(a^2-b)$. **333.** 2) $(x-y)(x-y-3)$; 4) $(b-3)(a-1+b)$. **334.** 2) 16; 4) 48. **335.** 2) $2(a-b)(3a-2b)$; 4) $(a-b)^2(2a-b)$. **336.** 2) $a^2(a+1)(a+2)$; 4) $5p(p+q)(2p-q)$. **337.** 1) $x_1=0$, $x_2=2$; 2) $x_1=0$, $x_2=-3$; 3) $x_1=0$, $x_2=-0,6$; 4) $x_1=0$, $x_2=1\frac{3}{4}$; 5) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=4$; 6) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\frac{3}{4}$. **339.** 2) $(m-n)(1+p)$; 4) $(x-y)(1+2a)$. **340.** 2) $(p-1)(4q+1)$; 4) $(p-1)(4q-1)$. **341.** 2) $(c+d)(a-3b)$; 4) $(a-3b)(x+5y)$. **342.** 2) $5(x+y)(2x+1)$; 4) $(3x^2+2y^2)(16x-5y)$. **343.** 2) $(2nk+5m)(3mk-7n^2)$; 4) $(5c-3x)(8b-3c)$. **344.** 2) $(y-x^2)(b+c-a)$. **345.** 2) $-0,625$; 4) $-0,33$. **346.** 2) 12 500; 4) 28. **347.** 1) $x_1=4$, $x_2=-1$; 2) $x_1=4$, $x_2=-7$; 3) $x_1=2$, $x_2=-0,2$; 4) $x_1=-4$, $x_2=\frac{1}{3}$. **348.** x^2-3x. **349.** 1) $(x+1)(x+2)$; 2) $(x-2)(x-3)$; 3) $(x+1)(x-8)$; 4) $(x-1)\times(x+10)$. **350.** 1) $(a-1)(a^2+3a+3)$; 2) $(x-1)(x+3)(x-2)$; 3) $(a+1)(a^3+a^2-a+1)$; 4) $(a-1)(a+1)(2a^2+1)$. **351.** 2) $\left(\frac{1}{3}ab\right)^2$; $(0,5xy)^2$; $(0,4m^2)^2$; $(0,9n^3)^2$.

352. 2) $(2a-3)(2a+3)$; 4) $(9a-4b)(9a+4b)$. **353.** 2) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}b\right)\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}b\right)$, 4) $(0,3x-0,4y)(0,3x+0,4y)$. **354.** 2) $(xy^2-4)(xy^2+4)$; 4) $(5a-3b^3)(5a+3b^3)$. **355.** 2) $(a-b^2)(a+b^2)(a^2+b^4)$; 4) $(b-3)(b+3)(b^2+9)$. **356.** 2) c^2-9d^2; 4) $9m^2-4n^2$. **357.** 2) a^4-b^6; 4) m^8-n^8. **358.** 2) $4m^8-25n^4$; 4) $1,44a^4-0,09b^4$. **359.** 2) 4896; 4) 2491. **360.** 2) 1584; 4) 39 999. **361.** 2) $(m-n-k)(m-n+k)$; 4) $3(x-y)(3x+y)$. **362.** 2) $(a-c)(a+2b+c)$; 4) $8(b-a)(a+b)$. **363.** 2) 960; 4) 5,87; 6) $37\frac{1}{3}$. **364.** 2) $x=-3\frac{2}{3}$; 4) $x=2$. **365.** 2) x^4-1; 4) $81a^4-16b^4$. **366.** 2) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{1}{3}$. **369.** 1) $6b(a-b)(a+b)$; 2) $a^2(2b-1)(2b+1)$; 3) $a^2b^2(2ab-1)(2ab+1)$; 4) $(3a^2-2b^2-ab)(3a^2-2b^2+ab)$. **370.** 2) $x^2-2xy+y^2$; 4) x^2+2x+1. **371.** 2) $9x^2+12xy+4y^2$; 4) $25z^2-10zt+t^2$. **372.** 2) $0,16b^2-0,4bc+0,25c^2$; 4) $\frac{1}{16}a^6-\frac{2}{5}a^3+\frac{16}{25}$. **373.** 2) $9b^4+12ab^3+4a^2b^2$; 4) $16x^2y^2+4xy^3+0,25y^4$. **374.** 2) 1681; 4) 9604. **375.** 2) 3249; 4) 1 002 001. **376.** 2) 1,008; 4) 1,022; 6) 0,988; 8) 0,978. **377.** 2) $x=\frac{1}{16}$; 4) $x=9b^2$. **378.** 2) $\frac{1}{4}b^2$; 4) $x=1$. **379.** 2) $(1+c)^2$; 4) $(9-x)^2$. **380.** 2) $(10-3a)^2$; 4) $(a+5b)^2$. **381.** 2) $(p^2-q)^2$; 4) $(5a^2+3b)^2$. **382.** 2) $(b-3)^2(b+3)^2$; 4) $(2-ab)^2\times(2+ab)^2$. **383.** 2) $-(3-b)^2$; 4) $-3(a+2b)^2$. **384.** 2) $x=2$; 4) $x=-0,5$. **385.** 2) $4xy$; 4) $2(4a^2+b^2)$. **387.** 2) 60 000; 4) 216. **388.** 2) 10 000; 4) $\frac{2}{3}$. **389.** 1) $x^3+6x^2+12x+8$; 2) $27-27y+9y^2-y^3$; 3) $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$; 4) $27b^3+54b^2a+36ba^2+8a^3$. **390.** 1) $(5+a)^3$; 2) $(m-4)^3$; 3) $(x^2-y)^3$; 4) $(c^2+d^2)^3$. **391.** 4 или 6. **392.** 2) $3(x-2)(x+2)$; 4) $4x(2-x)(2+x)$; 6) $2a^2b(4a-1)(4a+1)$. **393.** 2) $2(m-n)^2$; 4) $8(p-1)^2$; 6) $12m^2n(m+1)^2$. **394.** 2) $(x+1)^2(x^2+2x-1)$; 4) $(3+y)^2(9-y^2-6y)$. **395.** 2) $(1-x+y)(1+x-y)$; 4) $(2-x-y)(2+x+y)$. **396.** 2) $(a+b)(a-b-1)$; 4) $(x+1)^2(x-1)$; 6) $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$. **397.** 2) $\frac{5}{8}$; 4) $1\frac{3}{8}$. **398.** 2) 740; 4) -9700. **400.** 2) 474. **401.** 1) $x_1=1\frac{1}{3}$, $x_2=-\frac{5}{6}$; 2) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{2}{5}$; 3) $x_1=1$, $x_2=-1$; 4) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$. **404.** 1) a^3-8; 2) b^3+x^3; 3) $8a^3+27$; 4) a^6-1. **405.** 1) $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$; 2) $(xy+4)(x^2y^2-4xy+16)$; 3) $(2m+n^3)(4m^2-2mn^3+n^6)$; 4) $(c^2-5d)(c^4+5c^2d+25d^2)$. **408.** 2) $(x-y)(4+3x-3y)$; 4) $(b-a)(b-a-1)$. **409.** 2) $2a(a+2)$; 4) $(a-2b)(a+2b)$. **410.** 2) $(p-q)\times(c-a+b)$. **411.** 2) $(2m-n)(7a+4b)$; 4) $(5a-2b+1)(5a+2b-1)$. **412.** 2) 906. **413.** 2) $46\frac{2}{3}$. **415.** 2) $(m-k)(n-m-k)$; 4) $(c-1-d-e)(c-1+d+e)$. **416.** 2) $-4(x^2+6)$; 4) $(2x+9)(8x+5)$. **417.** 2) $y=3$; 4) $y=\frac{2}{3}$; 6) $x=2$. **418.** Площадь прямоугольника меньше площади квадрата на 144 м². **419.** 240 км. **420.** 1 ч 12 мин. **421.** 2) $-390,5$. **422.** 1) $a^2-b^2-2bc-c^2$; 2) $a^4-b^2+2bc-c^2$. **423.** 1) 5; 2) 26. **424.** 1) $x=2$; 2) $x=3$; 3) $x=2$; 4) $x=0,2$. **426.** Верно. **427.** $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$. **428.** $\frac{c^2+d^2}{2cd}$. **430.** 2) $b\neq0$; 4) $a\neq3$. **431.** 2) $v=\frac{s-s_0}{t}$. **432.** 2) $a=9$;

4) $a=-cb$; 6) $a=4m^2$. 434. 2) $\frac{4}{5}$; 4) -2. 435. 2) $-\frac{2}{7}$; 4) $\frac{b}{3a}$. 436. 2) $\frac{7a}{5}$; 4) $\frac{1}{3(a-b)}$; 6) $-\frac{1}{3}$. 437. 2) $\frac{2}{a(a-b)}$; 4) $\frac{1}{m-n}$. 438. 2) $\frac{2a}{m-n}$; 4) $\frac{4a-1}{2a+3}$; 6) $\frac{1+b}{1-b}$. 439. 2) $\frac{q^2}{p-q}$; 4) 5; 6) $-\frac{1}{4}$. 440. 2) $\frac{3a+2b}{2a+3b}$; 4) $-\frac{1}{ab}$. 441. 2) $\frac{1}{a+b}$; 4) $5+x$. 442. 2) $10-7b$; 4) $\frac{y}{5+y}$; 6) $\frac{5ab}{a^2-b^2}$. 443. 2) $\frac{1}{b+7}$; 4) $\frac{1}{1-2p}$. 444. 2) $n-m$; 4) $\frac{1}{5-2x}$. 445. 2) $\frac{4a+1}{4a-1}$; 4) $\frac{10(m+n)}{3(m-n)}$ 446. 2) $a+b$; 4) $\frac{x-y}{3-2x}$. 447. 2) $\frac{a}{2}$; 4) $y^2(x-y)$. 448. 2) $-1\frac{2}{3}$. 449. 1) -25; 2) 0,5. 450. 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3; 3) 2; 4) $-\frac{1}{3}$. 451. 2) $\frac{10}{14}$, $\frac{3}{14}$; 4) $\frac{2a}{2b}$, $\frac{a}{2b}$. 452. 2) $\frac{3b^2}{4ab}$, $\frac{2a^2}{4ab}$; 4) $\frac{2b^2}{6ab}$, $\frac{9ac}{6ab}$, $\frac{c}{6ab}$. 453. 2) $\frac{3a^3}{18a^2b^2}$, $\frac{2(a^2+b^2)}{18a^2b^2}$, $\frac{a(3-a)}{18a^2b^2}$; 4) $\frac{21y^2}{60x^4y^4}$, $\frac{310x^3y}{60x^4y^4}$, $\frac{80x^2}{60x^4y^4}$.

454. 2) $\frac{7a(3x+y)}{9x^2-y^2}$, $\frac{6b(3x-y)}{9x^2-y^2}$; 4) $\frac{6x}{8(x+y)}$, $\frac{x}{8(x+y)}$. 455. 2) $\frac{7a}{x^2-9}$, $\frac{a(x-3)}{x^2-9}$; 4) $\frac{6x(x+y)}{x^2-y^2}$, $\frac{7xy(x-y)}{x^2-y^2}$, $\frac{3}{x^2-y^2}$. 456. 2) $\frac{(a-b)^2}{5(a^2-b^2)}$, $\frac{5(a^2+b)}{5(a^2-b^2)}$; 4) $\frac{5c}{(c-2)^2}$, $\frac{6(c-2)}{(c-2)^2}$. 457. 2) $\frac{18ab}{6a}$, $\frac{7}{6a}$; 4) $\frac{4a^2b^3}{4ab^2}$, $\frac{3b}{4ab^2}$, $\frac{8}{4ab^2}$; 6) $\frac{ab(a^2-b^2)}{ab(a-b)}$, $\frac{3(a-b)}{ab(a-b)}$, $\frac{ab}{ab(a-b)}$. 458. 2) $\frac{15x(x+1)}{12x(x^2-1)}$, $\frac{-48x^2}{12x(x^2-1)}$, $\frac{4(x-1)}{12x(x^2-1)}$; 4) $\frac{3ac(2a+3)}{c(4a^2-9)}$, $\frac{4ac(2a-3)}{c(4a^2-9)}$, $\frac{5b}{c(4a^2-9)}$. 459. 2) $x=\frac{1}{3}$; 4) $x=1\frac{1}{6}$. 460. 1) $\frac{5a}{a^3-27}$, $\frac{(a-3)^2}{a^3-27}$, $\frac{a^2+3a+9}{a^3-27}$; 2) $\frac{3(x^2-2x+4)}{x^3+8}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$, $\frac{(x+2)^2}{x^3+8}$; 3) $\frac{2m(m+n)}{(m+n)(m-n)^2}$, $\frac{2n(m^2-n^2)}{(m+n)(m-n)^2}$, $\frac{(m-n)^2}{(m+n)(m-n)^2}$; 4) $\frac{k-1}{(k-1)(k+1)^2}$, $\frac{2(k+1)^2}{(k-1)(k+1)^2}$, $\frac{3(k^2-1)}{(k-1)(k+1)^2}$. 461. 1) $x^{4n}-y^{4n}$; 2) $a^{3n}-b^{3n}$; 3) $(a^n-b^n)\times$ $\times(a^n+b^n)^2$; 4) $(x^n-y^n)(x^{4n}-y^{4n})$. 462. 2) $\frac{2a}{c^2}$; 4) $\frac{7}{a^2}$. 463. 2) $\frac{3}{5b}$; 4) $\frac{3ad-b}{12d}$.

464. 2) $\frac{4c^2+2c-3}{c^2}$; 4) $\frac{mn-kn^2+m^2}{n^2}$. 465. 2) $\frac{4a^4-21cb^3}{18a^2b^4}$; 4) $\frac{b(ad^2+d+c)}{c^2d^2}$. 466. 2) $\frac{3x}{2(1-x)}$; 4) $\frac{8y-25x}{10(y-3)}$. 467. 2) $\frac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}$; 4) $\frac{a+b-y}{ab}$. 468. 2) $\frac{x-1}{x^2-9}$; 4) $\frac{2x^2+3x+2}{x^2-16}$. 469. 2) $\frac{7q-p}{3p-q}$; 4) $\frac{2(4a+4b-35)}{2b-5}$. 470. 2) $\frac{6n-47}{n^2-49}$; 4) $\frac{24y^2+y+1}{1-9y^2}$. 471. 2) $\frac{13a+4}{(3a+1)^2}$; 4) $\frac{4+7m-7n}{(m-n)^2}$. 472. 2) $\frac{b^2-3b}{b-2}$; 4) $\frac{1}{a+1}$.

473. 2) $\frac{2(2x-y)}{x^2-y^2}$; 4) $\frac{a^2-a+1}{a(4a^2-1)}$; 6) $\frac{6-7a}{(a-2)(a^2-4)}$. 474. 2) -1; 4) $-\frac{5}{9}$. 475. 2) $\frac{2}{(3x+1)^2}$; 4) $\frac{2(x^2+9)}{(x^2-9)^2}$. 476. 2) $x=1$; 4) $x=15$. 477. 1) $\frac{2}{a^2-1}$;

2) $\frac{2a}{a^3+8}$; 3) $\frac{3ab}{a^3+b^3}$; 4) $\frac{6m}{27-m^3}$. 478. 1) 5; 2) $1\frac{9}{19}$. 479. 1) $\frac{1-2b^n}{a^{2n}-b^{2n}}$; 2) $\frac{a^n-b^n}{a^n(a^n+b^n)}$. 480. 2) $\frac{4}{13}$; 4) 7,5. 481. 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{2a^2b^2}{c^3}$. 483. 2) $\frac{a}{bc}$; 4) $\frac{ac}{b}$. 484. 2) $\frac{18a^3}{7}$; 4) $\frac{a^3b^3}{d^2}$. 485. 2) $\frac{2y}{5c^2}$; 4) $\frac{2a^2d^2}{3c}$; 6) $\frac{22p^3n}{m^4}$. 486. 2) $\frac{2b}{a}$; 4) $3b$; 6) $\frac{a(a+b)}{3b}$. 487. 2) $\frac{b}{3(1+a)}$; 4) $\frac{1}{3m^2(m+n)}$; 6) $\frac{5}{3(a-b)}$. 488. 2) $-2,25$; 4) -2. 489. 2) Верно. 490. 2) $b-3$; 4) $(a-1)(2a-1)$. 491. 2) $x=-4$; 4) $x=49$. 492. 1) $x=\frac{a}{a-b}$; 2) $x=b(a+b)$; 3) $x=\frac{b(a+b)}{a-b}$; 4) $x=\frac{b(a+b)}{a}$.

493. 1) $\frac{1}{8}(a^2-b^2)$; 2) $\frac{1}{7}(a^2-b^2)$; 3) $n+m$; 4) $\frac{m+n}{2(p^2-pc+c^2)}$. 495. 2) $\frac{2}{3}(a+1)$; 4) 1; 6) $\frac{b^2}{b^2+1}$. 496. 2) $\frac{a^2(b^2-1)}{b^2}$. 497. 2) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$. 498. 2) $\frac{1}{6(c+d)}$; 4) $\frac{m+5}{m-2}$. 499. 2) $\frac{b}{a+b}$; 4) $\frac{1}{c}$. 500. 2) $\frac{ab-2}{a+1}$; 4) $n+2$. 501. 2) $\frac{a^2+4}{4a}$; 4) $\frac{m^2}{m-n}$. 502. 2) $1\frac{5}{6}$; 4) 2. 503. 1) $\frac{d-c}{d}$; 2) $\frac{2n(2n-k)}{2n+k}$; 3) $\frac{b(x-b)}{x+b}$; 4) $\frac{2q(m-2q)}{m+2q}$. 506. 2) $x=-2$; 4) $x=0$. 507. 2) $x=\frac{2a^2}{3b}$; 4) $x=\frac{(a-1)^2}{a}$. 508. 2) $x=0,5$; 4) $x=-2\frac{2}{15}$. 509. 2) 2,5. 510. 2) $\frac{b-3b^2-14}{6(b^2-1)}$; 4) $\frac{28n^2+9nm-4m^2}{m(4n^2-m^2)}$; 6) $\frac{4a^2-4a-b}{a(a+2)}$. 511. 2) $\frac{x(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+3)(x^2+2)}$; 4) 1. 512. 2) $\frac{4}{a-b}$; 4) $\frac{1}{c(a+b)}$. 513. $\frac{V_1p}{V}$ кг. 514. $\frac{us}{v}$ км. 515. $\frac{v-v_1}{v+v_2}s$ км. 516. $\frac{ab}{a+b}$ ч. 517. $\frac{ab}{b-a}$ ч. 518. 2) $R_1=\frac{RR_2}{R_2-R}$. 519. 10 м. 520. 1) $\frac{b}{4a^2+2a+1}$; 2) $\frac{9a^2-3ab+b^2}{b}$; 3) $\frac{6-c}{6+c}$; 4) $\frac{5+7b}{5-7b}$; 5) $\frac{1}{a}$; 6) $a+1$. 521. 1) $\frac{2}{a^2-1}$; 2) $\frac{2a}{a^3+8}$; 3) $\frac{3ab}{a^3+b^3}$; 4) $\frac{6m}{27-m^3}$. 530. $D(1;\ 5)$. 533. а) $(5;\ -3)$, $(-1;\ 2)$, $(0;\ -4)$, $(-2;\ 0)$, $(-2;\ -3)$; б) $(-5;\ 3)$, $(1;\ -2)$, $(0;\ 4)$, $(2;\ 0)$, $(2;\ 3)$; в) $(-5;\ -3)$, $(1;\ 2)$, $(0;\ -4)$, $(2;\ 0)$, $(2;\ -3)$. 535. $(2;\ 2)$, $(-2;\ 2)$, $(-2;\ -2)$, $(2;\ -2)$. 537. 2) 4; 2; 0; -2; -4; 4) -36; -16; 4; 24; 44. 538. 2) $t=4$. 539. 2) -9; 103; $-1,25$. 540. 2) $x=-0,5$, $x=3,1$, $x=-14$. 541. 2) Верно; 4) неверно. 542. 2) $y(-3)=3$ верно, $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$ верно, остальные неверны. 549. 2) Нет; 4) да. 550. 2) Да; 4) нет. 551. $P=4x+6$, $S=x(x+3)$; 1) $P(5)=26$, $S(5)=40$; $P(2,1)=14,4$, $S(2,1)=10,71$; 2) $x=8$, $x=10$. 552. $m(V)=2600V$; 1) 39 ц, 26 м; 2) 0,2 м^3, 3 м^3. 554. $y=2n$, $y(6)=12$, $y(11)=22$. 557. $s=80t$, $s(3)=240$, $s(5,4)=432$. 564. C, D. 567. В 2 раза. 568. 5 т. 571. $k=-2$. 572. $y=14x$. 580. 2) $x=-1$, $x=3$, $x=\frac{1}{3}$. 585. 2) Нет; 4) нет. 595. 2) $k=-3$. 596. $(13;\ 0)$, $(0;\ 13)$, 84,5. 597. 1) $(5;\ -3)$; 2) $(2;\ 8)$; 3) $(2;\ -3)$. 598. $k=2\frac{2}{9}$, $b=5\frac{5}{9}$. 599. Нет. 604. 2) -20. 607. 2) $(0;\ 4)$, $(2;\ 0)$; 4) $(0;\ -0,6)$, $\left(\frac{3}{4};\ 0\right)$; 6) $(0;\ -5)$, $(7,5;\ 0)$. 615. 2) $x=\frac{y-2}{3}$, $y=3x+2$; 4) $x=\frac{3-7y}{2}$, $y=\frac{3-2x}{7}$. 616. $x=\frac{5}{3}$. 622. $c_1=$

$m=-1$, $c_2=18$. 623. $a=5$, $b=-9$. 624. 1) Нет; 2) нет. 625. 1) (3; 4), (4; 3); 2) (3; 7), (7; 3). 626. 2) $x=10+y$, $y=x-10$; 4) $x=11-3y$, $y=\frac{11-x}{3}$; 6) $x=\frac{5y-3}{3}$, $y=\frac{3+3x}{5}$. 627. 2) (1; −1); 4) $\left(-\frac{1}{3}; -5\frac{2}{3}\right)$; 6) (1, −1). 628. 2) (−73; −30); 4) $\left(1\frac{2}{11}; 8\frac{6}{11}\right)$. 6) $\left(-7\frac{2}{9}; -4\frac{1}{3}\right)$. 629. 2) (4,4; 2,4); 4) (3; 4). 630. 2) (−2; −2); 4) (−17; 5). 631. 2) (15; 12); 4) (5; 4). 632. 2) $\left(3\frac{1}{11}; 1\frac{9}{11}\right)$; 4) $\left(-\frac{23}{27}; \frac{1}{27}\right)$. 633. 2) $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$; 4) (−1; 6). 634. 2) (3; 1); 4) (−4; −3). 635. 2) (2; 6); 4) (−12; 10). 636. 2) (4; 4); 4) (2; 7). 637. 2) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{6}\right)$; 4) (2; 5). 638. 2) (−2; 3); 4) (−6; 0). 639. 1) (5; 8); 2) (5; 11); 3) (4; −3); 4) (4; −6). 640. 1) (3; 1); 2) (7; 5). 641. 2) (0; 3), (−1; 0); 4) (0; 6), (2,4; 0). 644. 2) (1; −3); 4) (3; 9). 645. 2) (1; −1); 4) (3; 1). 646. 2) (2; −4); 4) (3; −2). 653. 20 к., 3 к. 654. 2,7 м, 1,6 м. 655. 21 ц, 14 ц. 656. 100 и 200. 657. 40 и 30. 658. 38 га, 34 га. 659. 9 кг, 6 кг. 660. 10 р., 6 р. 661. 62 л, 78 л. 662. 19 л 14 л. 663. 10 км/ч, 2 км/ч. 664. 30 км/ч, 35 км/ч. 665. 200 т, 260 т. 666. 552 и 672 667. 39. 668. 45. 669. 8 л, 6 л, 5 л. 670. 16 км. 671. 2) $\left(2; \frac{1}{3}\right)$; 4) (2; −7). 672. 2) (−68; 12). 673. 1) $\left(3\frac{1}{2}; 1\frac{1}{3}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$; 3) (−2*a*; *a*), где *a* — любое число; 4) нет решений; 5) (2,5; −3,5); 6) (−5; 4,5). 676. 1) $a\neq 3$; 2) $a=3$, $c=15$; 3) $a=3$, $c\neq 15$. 677. 50 к., 30 к. 678. 35 и 9 лет. 679. 350 км, 8 ч. 680. 144 р., 175 р. 681. 460 м², 560 м². 682. 52 м, 34 м. 683. 36 строк, 50 букв. 684. 1) (3; 4); 2) $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{6}\right)$; 3) (3; −2); 4) (17,6; −14,4). 685. 180 р., 270 р. 686. 2) 0,01; 4) −20; 6) $\frac{1}{3}$. 687. −128. 688. $100a+10b+c$, $100c+10b+a$. 689. $1000a+c$. 690. 2) 0. 691. 2) $x=2$; 4) $x=21$. 692. 2) $x=7\frac{1}{2}$; 4) $x=\frac{21}{22}$. 693. 2) $x=2$; 4) $x=2\frac{2}{7}$. 694. 2) $x=2$; 4) $x=12\frac{1}{7}$. 695. 40; 36; 43. 696. 9 лет. 697. 48 км. 698. 120 км. 699. 2) $\frac{1}{7x}$; 4) $2b$; 6) 0. 700. 2) $-a^4b^7c^2$; 4) m^4n^6. 701. 2) $0{,}64a^2c^4$; 4) $\frac{1}{16}a^4b^8c^{12}$. 702. 2) $4a^2+5ab+b^2$; 4) $8a^2$. 703. 2) $\frac{1}{6}m^4n^2-\frac{1}{4}m^3n^3+\frac{1}{3}m^2n^4$; 4) $m^4n-\frac{7}{6}m^3n^2+\frac{1}{6}mn$. 704. 2) $12a^3b-3a^2-24a^2b^2+6ab^2+8ab^3-2b^4$; 4) m^3-n^3+4n-4; 6) $1{,}5a^3+11{,}5a^2-a-1$. 705. 2) $-\frac{1}{7}$; 4) $1\frac{1}{8}$. 706. 2) $1-16b^4$; 4) $\frac{a^2}{4}$. 707. 2) $16ab$; 4) $-28b$. 708. 2) $4(1+b)^2$; 4) $3(1+a)(7-3a)$. 709. 2) $2-a$; 4) $\frac{3(b-2)}{b+2}$. 710. 2) $\frac{b^2+a+b}{a^2b^2}$; 4) $\frac{40y^2+36xy-75x^2}{60x^2y^2}$. 711. 2) $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$; 4) $\frac{b}{9}$. 712. 2) $-\frac{1}{2x+3y}$; 4) $\frac{1}{m-n}$. 713. 2) $\frac{2(a-b)^2}{b^3}$; 4) $\frac{3}{2}$. 714. 2) $\frac{1+9b}{ab-3}$; 4) $\frac{d(2c+d)}{3(c-2d)}$. 715. 2) $\frac{1-2a^2}{(a+1)(1-2a)}$; 4) b. 716. 2) $\frac{1+b}{1-b}$. 722. 2) $\left(\frac{11}{14}; 1\frac{5}{14}\right)$. 723. 2) (3; 3); 4) (−1; −6); 6) $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$. 724. 2) (3; 4); 4) $\left(\frac{7}{12}; \frac{1}{12}\right)$. 725. 2) (−2; 4); 4) (3; 1). 726. 20 л, 5 л. 727. 55 к., 30 к. 728. $\frac{5}{8}$. 729. 4 км/ч, 20 км/ч. 730. 2) $x=1$; 4) $x=-\frac{2}{3}$. 731. 150. 732. $k=\frac{2}{3}$, $b=\frac{5}{3}$. 733. $k=-1$. 734. 2) (3; 1). 735. 6 р., 5 р. 736. 11 и 5 лет. 737. 21 км. 738. 2) $x_1=-3$, $x_2=2$, $x_3=4$; 4) 0; −36; 5) x^2-6x+8. 739. 2) $A=0$ при $x_1=5$, $x_2=\frac{1}{3}$; $B=0$ при $x_1=1$, $x_2=5$; 4) $x=\frac{1}{3}$. 740. 2) Проходит через точку (−3; 5), не проходит через точку (−1; 2); 4) $x=-\frac{1}{2}$; 6) (−3; 5). 741. 2580 ц. 742. 80 га. 743. 2) b^3; 4) $8a^6$. 744. 2) $2a^2(a^2-1)$; 4) $(3b-14a)(16a-7b)$. 745. 1) $(ab^2c-1)(a^2b^4c^2+ab^2c+1)$; 2) $(2ab+5c)(4a^2b^2-10abc+25c^2)$; 3) a^2; 4) $16a^3$. 746. 1) $(ab-cd)(4b+15c)$; 2) $(m-1)(m^2+1)$; 3) $(a+b-c)(a+b+c)$; 4) $(1-a+b)(1+a-b)$; 5) a^2; 6) $(m-1)^2$. 747. 1) $\frac{1}{m(1-m^2)}$; 2) $\frac{x^2y^2-x^2-y^2}{x^2y^2(x^2+y^2)}$; 3) $\frac{12m}{5n}$; 4) $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^4+b^4}$; 5) 1; 6) 1. 748. 1) $(a+1)(a-3)$; 2) $(b-3)(b-4)$; 3) $(a-2)(a^2+3a+6)$; 4) $(x-1)(x-2)(x+3)$; 5) $(m-2)(m-5)$; 6) $(m+1)(m-2)$. 749. 1) $\frac{2a(b-2a)}{b+2a}$; 2) $\frac{2q(2q-p)}{p+2q}$; 3) $\frac{1}{2-3a}$; 4) $\frac{1}{2-p}$. 750. 1) $b=7$; 2) $b=1$; 3) $b=11$; 4) $b=11{,}5$. 751. 1) $y=-3$; 2) $y=x$; 3) $y=-x+4$; 4) $y=-5x+7$. 752. 12 км. 753. 60 км, 12 км/ч, 5 ч. 754. 8 лошадей, 30 дней. 756. 3 ч, 9 ч. 757. Отношение разности количества денег к разности количества вещей. 758. 3,75 ф. 760. 2400 р.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

Глава I. 1) а) 120,3; б) $-3\frac{1}{6}$; 2) $4y+3x$, $\frac{1}{3}$; 3) $10a+5b$.

Глава II. 1) Да, $x=-4$; 2) $x=\frac{1}{3}$, $x=3$; 3) 7 м и 8 м.

Глава III. 1) 5^8, 3^9, 2^{12}, 6^3; 2) $3b+d$; 3) $-1{,}25a^4b^3c^2$; $0{,}7m-2n-1$; 4) $3m^2-4$; $-3{,}8125$.

Глава IV. 1) $2a^2+12a$; 2) $y(x-2)$; $(4a-9)(4a+9)$; $3x^2(1-2x)$; $(x-5)^2$; $(x-1)(3+y)$; $2(a-b)^2$; 3) $(a-3b)(a+3)$; 8.

Глава V. 1) $b\neq 0$, $a\neq 1$, $b\neq -2$; 2) $\frac{1}{a}$, $\frac{4ab}{a^2-b^2}$, 4, $\frac{a-b}{b}$; 3) $\frac{1}{x-3}$, −3.

Глава VI. 1) $y=0$; $x=18$; нет.
2) Рис. 46, рис. 47, рис. 48.

Глава VII. 1) Да; 2) (3; −1); (1; −1); 3) 8 кг яблок, 10 кг груш.

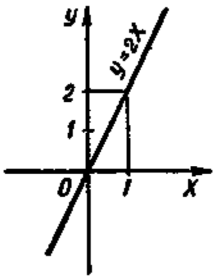


Рис. 46

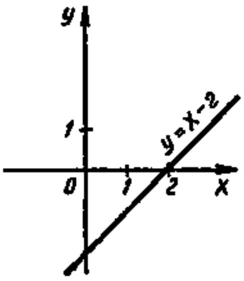


Рис. 47

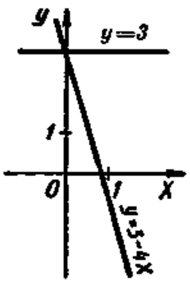


Рис. 48

Ответы к занимательным задачам

1. 99+9:9. 2. Треугольников 44, квадратов 10, прямоугольников 8. 3. 5. 4. Из второго стакана перелить воду в пятый стакан. 5. 6; 3; 6. 6. 18 мин. 7. 24 000 км. 8. 6 уток. 9. 4.00. 10. В семье 7 детей. 11. 20 локтей.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

СВЕДЕНИЯ О ПОЛЬЗОВАНИИ УЧЕБНИКОМ

№	Фамилия и имя ученика	Учебный год	Состояние учебника	
			В начале года	В конце года
1				
2				
3				
4				
5				

Учебное издание

Алимов Шавкат Арифджанович
Колягин Юрий Михайлович
Сидоров Юрий Викторович
Федорова Надежда Евгеньевна
Шабунин Михаил Иванович

АЛГЕБРА

Учебник для 7 класса
средней школы

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. М. Котова*
Младший редактор *М. К. Кузин*
Художники *Б. Л. Николаев, Н. А. Корыстошевская*
Художественный редактор *Ю. В. Пахомов*
Технический редактор *М. М. Широкова*
Корректоры *Н. А. Корогодина, Г. Н. Моснякина*

ИБ № 13 362

Подписано в печать 18.08.95. Формат 84×108 1/32. Бумага типограф. № 1. Гарнит. литер. Печать высокая. Усл. печ. л. 12+0,25 форзац. Усл. к -отт. 12,69. Уч.-изд. л. 9,56+0,41 форзац. Тираж 40 000 экз. Заказ № 435

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и массовой информации РСФСР. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с оригинал-макета в ордена Трудового Красного Знамени ГП «Техническая книга» Комитета Российской Федерации по печати. 198052, г. Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29

СВОЙСТВА ВЕРНЫХ РАВЕНСТВ

если $a=b$, то $a+c=b+c$

если $a=b$, то $ac=bc$, $c\neq 0$

УРАВНЕНИЕ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

если $ax=b$, $a\neq 0$, то $x=\frac{b}{a}$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

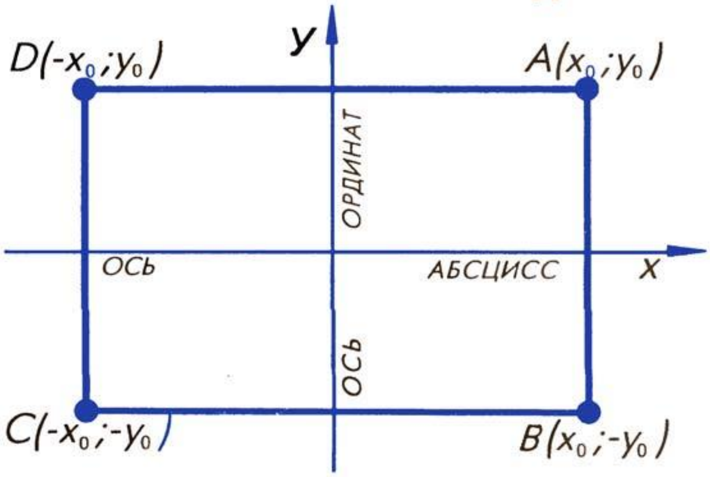
$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ



ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ